

А.Ю. Савицький

(Україна, Вінниця, Вінницький національний технічний університет)

ПАРАМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ВИМІРЮВАННЯ ФАЗИ СИГНАЛУ**Анотація**

Розглянуто математичний апарат вимірювання фази зашумлених сигналів із швидко змінюючими параметрами. Показано методику підвищення точності вимірювання фази сигналу за рахунок використання метода найменших квадратів для неперервних періодичних функцій.

Ключові слова: періодичний сигнал, фаза, метод найменших квадратів.

Abstract

The mathematical apparatus for measuring the phase of noisy signals with rapidly changing parameters is considered. The method of increasing the accuracy of measuring the signal phase due to the use of the least squares method for continuous periodic functions is shown.

Keywords: periodic signal, phase, approximation, method of least square.

Вступ

Високоточне вимірювання фази сигналів використовується в вимірюванні шорсткості поверхонь, радіонавігації, параметрів фазованих антенних решіток. Відомі методи вимірювання вимагають підвищення відношення сигнал/шум, яке вимагає використання складного апарату фільтрації. Для реалізації вимірювання фази в умовах реального часу необхідно використання додаткової апріорної інформації, що можливе лише з використанням сучасних цифрових засобів [1].

Результати дослідження

Розглянемо два гармонічних сигнали з однаковими частотами, різними фазами і різними огинаючими [9]:

$$x_1(t) = a_1(t) \sin[\theta(t)], \quad x_2(t) = a_2(t) \sin[\theta(t) + \varphi_0]$$

Припустимо, що дані параметри змінюються відносно повільно, тому можна записати: $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, $\dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t) \sim \mu \omega^2(t)$, $\dot{a}_1(t) \sim \mu a_1(t) \omega(t)$, $\dot{a}_2(t) \sim \mu a_2(t) \omega(t)$, $0 < \mu \ll 1$, де $a(t)$ – огинаюча, $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ – миттєва частота.

Нехай Δ – деякий часовий інтервал, такий, що $\omega(t)\Delta < \pi/2$. Переходячи до дискретизації сигналу з кроком Δt інтервал Δ може містити декілька інтервалів Δt , тобто $\Delta = Q\Delta t$. Якщо взяти значення сигналів в точках $(t - i\Delta)$, (i змінюється в межах від 0 до 4) і розкладемо їх в ряд біля центральної точки $(t - 2\Delta)$ з кроком Δ і 2Δ :

$$x_1(t - i\Delta) = (a_1(t - 2\Delta) + \dot{a}_1(t - 2\Delta)\Delta(2 - i) + o(\mu)) \times \sin\left(\theta(t - 2\Delta) + \omega(t - 2\Delta)\Delta(2 - i) + \frac{\dot{\omega}(t - 2\Delta)}{2}((2 - i)\Delta)^2 + o(\mu^2)\right),$$

$$x_2(t - i\Delta) = (a_2(t - 2\Delta) + \dot{a}_2(t - 2\Delta)\Delta(2 - i) + o(\mu)) \times \sin\left(\theta(t - 2\Delta) + \omega(t - 2\Delta)\Delta(2 - i) + \frac{\dot{\omega}(t - 2\Delta)}{2}((2 - i)\Delta)^2 + o(\mu^2) + \varphi_0\right).$$

Введемо нові позначення: $a_1(t - 2\Delta) = a_1$, $a_2(t - 2\Delta) = a_2$, $\theta(t - 2\Delta) = \theta$, $\omega(t - 2\Delta) = \omega$.

Після розглянемо комбінації відліків даного сигналу:

$$A_1(t) = x_1(t - 4\Delta)x_2(t) - x_1(t)x_2(t - 4\Delta) \approx a_1a_2 [\sin(\theta - 4\omega\Delta)\sin(\theta + \varphi_0) - \sin(\theta)\sin(\theta - 4\omega\Delta + \varphi_0)] = \frac{a_1a_2}{2} [\cos(4\omega\Delta + \varphi) - \cos(4\omega\Delta - \varphi_0)] = -a_1a_2 \sin(4\omega\Delta)\sin(\varphi_0), \quad (1)$$

$$A_2(t) = x_1(t - 3\Delta)x_2(t - \Delta) - x_1(t - \Delta)x_2(t - 3\Delta) \approx \frac{a_1a_2}{2} [\cos(2\omega\Delta + \varphi_0) - \cos(2\omega\Delta - \varphi_0)] = -a_1a_2 \sin(2\omega\Delta)\sin(\varphi_0). \quad (2)$$

Відношення даних величин дає вираз для оцінки частоти, яка відповідає моменту часу, що відповідає моменту часу $(t - 2\Delta)$:

$$2 \cos(2\omega\Delta) \approx \frac{x_1(t-4\Delta)x_2(t) - x_1(t)x_2(t-4\Delta)}{x_1(t-3\Delta)x_2(t-\Delta) - x_1(t-\Delta)x_2(t-3\Delta)} = \frac{A_1(t)}{A_2(t)}, \quad (3)$$

Аналогічно до співвідношень (1) і (2), побудуємо ще дві функції:

$$A_3(t) = x_1(t-3\Delta)x_2(t-\Delta) - x_1(t-2\Delta)x_2(t-2\Delta) \approx \frac{a_1 a_2}{2} [\cos(2\omega\Delta + \varphi_0) - \cos(\varphi_0)] = -a_1 a_2 \sin(\omega\Delta + \varphi_0) \sin(2\omega\Delta), \quad (4)$$

$$A_4(t) = x_1(t-\Delta)x_2(t-3\Delta) - x_1(t-2\Delta)x_2(t-2\Delta) \approx \frac{a_1 a_2}{2} [\cos(2\omega\Delta - \varphi_0) - \cos(\varphi_0)] = -a_1 a_2 \sin(\omega\Delta - \varphi_0) \sin(2\omega\Delta) \quad (5)$$

Вираз для оцінки різниці фаз:

$$\text{tg}(\varphi_0) \approx \pm \frac{A_3(t) - A_4(t)}{A_3(t) + A_4(t)} \sqrt{\frac{2A_2(t) - A_1(t)}{2A_2(t) + A_1(t)}}. \quad (6)$$

При переході до дискретного часу $t = n\Delta t$, $n = 0, \dots, N-1$, $\Delta = Q\Delta t$. Тоді співвідношення (1), (2), (4) і (5) для дискретного часу будуть:

$$\begin{aligned} A_1[n] &= x_1[n-4Q]x_2[n] - x_1[n]x_2[n-4Q], & A_2[n] &= x_1[n-3Q]x_2[n-Q] - x_1[n-Q]x_2[n-3Q], \\ A_3[n] &= x_1[n-3Q]x_2[n-Q] - x_1[n-2Q]x_2[n-2Q], & A_4[n] &= x_1[n-Q]x_2[n-3Q] - x_1[n-2Q]x_2[n-2Q], \\ n &= 4Q, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (7)$$

а $\text{tg}(\varphi_0)$ може обчислюється за допомогою метода найменших квадратів шляхом мінімізації похибки:

$$E(\varphi_0) = \sum_{n=4Q}^{N-1} \left[\{A_3[n] + A_4[n]\} \sqrt{2A_2[n] + A_1[n]} \text{tg}(\varphi) - \{A_3[n] - A_4[n]\} \sqrt{2A_2[n] - A_1[n]} \right]^2.$$

Вираз для оцінки різниці фаз описується виразом:

$$\text{tg}(\varphi_0) \approx \pm \frac{\sum_{n=4Q}^{N-1} (A_3^2[n] - A_4^2[n]) \sqrt{4A_2^2[n] - A_1^2[n]}}{\sum_{n=4Q}^{N-1} ((A_3[n] + A_4[n]) \sqrt{2A_2[n] + A_1[n]})^2}. \quad (8)$$

Висновки

Застосування запропонованої чисельна методика вимірювання фази сигналу із його вибірки, який дозволяє, за рахунок використання метода найменших квадратів із мінімізацією похибки відтворення, отримати високу точність одночасно із застосуванням сучасних мікропроцесорних засобів обробки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Mahmud S. M. High precision phase measurement using reduced sine and cosine tables // IEEE Transactions on instrumentation and measurement. 1990. 39. N 1. P. 56–60

2. Осадчук О.В. Обробка вимірювального сигналу сенсора за допомогою параболічної інтерполяції / Осадчук О.В., Савицький А.Ю., Звягін О.С. // Вісник Хмельницького національного університету. – 2015. – №2. – С. 153–158

Савицький Антон Юрійович — к.т.н., доцент кафедри інформаційних радіоелектронних технологій і систем, факультет інформаційних електронних систем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: Savitskyant@gmail.com

Savitskyi Anton Yu. — Ph.D., Associate Professor of the Department of Information Radio-Electronic Technologies and Systems, Faculty of Information Electronic Systems, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: Savitskyant@gmail.com