УДК 621.1

**Р. І. Сивак**
**Д. В. Балагур**

# ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПОРИСТИХ ТІЛ

Вінницький національний технічний університет

**Анотація**

*Запропоновано підхід, який полягає в певній послідовності обчислення похідних від координат вузлів по часу в поєднанні з методами теорії числових функцій дійсних змінних. Всі розрахунки виконані в ейлерових змінних, що виключає необхідність переходу із лагранжевих змінних в ейлерові і спрощує розв'язок задачі. Крім того, така методика дозволяє працювати з нерегулярною і непрямокутною сіткою в областях з будь-якою формою границь. Такий підхід є більш ефективним, з точки зору точності апроксимації, а також швидкості обчислень.*

**Ключові слова:** пористе тіло, апроксимація, сплайн, деформований стан, стаціонарне і нестаціонарне деформування.

Компоненти тензора швидкостей деформацій при осесиметричній деформації визначали по викривленню координатної сітки по формулах [1]

$$\dot{e}_r = \frac{r}{r_0}\left[\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial^2 z}{\partial z_0 \partial t} - \frac{\partial z}{\partial r_0}\frac{\partial^2 r}{\partial z_0 \partial t}\right],\ \dot{e}_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial t},\ \dot{e}_z = \frac{r}{r_0}\left[\frac{\partial r}{\partial r_0}\frac{\partial^2 z}{\partial r_0 \partial t} - \frac{\partial r}{\partial z_0}\frac{\partial^2 z}{\partial r_0 \partial t}\right]$$

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{r}{r_0}\left[\frac{\partial r}{\partial r_0}\frac{\partial^2 r}{\partial z_0 \partial t} + \frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial^2 z}{\partial r_0 \partial t} - \frac{\partial r}{\partial z_0}\frac{\partial^2 r}{\partial z_0 \partial t} - \frac{\partial z}{\partial r_0}\frac{\partial^2 z}{\partial z_0 \partial t}\right]. \quad (1)$$

Функції ейлерових координат від лагранжевих $z(z_0,r_0,t)$ і $r(z_0,r_0,t)$ получали шляхом апроксимації експериментальних даних кубічними сплайнами. Роль критерію якості апроксимації в цьому випадку виконує функціонал [2]

$$I_1(S) = \int_{x_1}^{x_N} \left|S''(x)\right|^2 dx + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\rho_i}\left(f_i - S(x_i)\right)^2, \quad (2)$$

де $f_i$ - значення згладжуваної функції в вузлі, $\rho_i \geq 0$ - ваговий коефіцієнт, $x_1$ і $x_N$ - границі області визначення функції $f(x)$.

Функціонал (2) дозволяє в залежності від вагових коефіцієнтів або збільшити точність апроксимації, або зменшити кривизну апроксимуючого сплайна. Краєві умови сплайна задавали в точках де вони відомі. Наприклад, на осі симетрії $r=0$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial r_0^2} = \frac{\partial r}{\partial z_0} = \frac{\partial z}{\partial r_0} = 0.$$

В крайніх точках сплайна, де граничні умови невідомі приймали краєві умови нульової кривизни.

Вагові коефіцієнти визначали шляхом ітерації [2]

$$\rho_i^{(k+1)} = \rho_i^{(k)} \frac{\delta_i}{\varepsilon_i^{(k)}} \quad (3)$$

де $\varepsilon_i = \left|S(x_i) - f_i\right| \leq \delta_i$, k - номер ітерації.

Пористість матеріалу в даній точці визначали шляхом вирізання малих об'ємів матеріалу з подальшим гідростатичним зважуванням. Крім того, пористість в кожному вузлі координатної сітки визначали наступним шляхом. Оскільки

$$\dot{e} = \frac{\dot{\theta}}{1-\theta}, \quad (4)$$

то легко показати, що

$$\theta = \theta_0 \exp \int_0^t \left( \dot{e}_r + \dot{e}_\varphi + \dot{e}_z \right) dt \, , \quad (5)$$

де θ - пористість при даній пластичній деформації, $\theta_0$ - початкова пористість.

Якщо пористість визначається на вільній поверхні, де $\sigma_r$=0, то використовуючи рівняння (4) і рівняння [3]

$$\dot{e}_r - \frac{\dot{e}}{3} = \frac{\dot{\gamma}}{\tau}\left(\sigma_r - p\right), \; \psi \dot{e} \tau = \varphi p \dot{\gamma}$$

отримаємо наступне диференціальне рівняння

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{e}_r (1-\theta)}{\frac{1}{3} - \frac{\psi}{\varphi}}, \quad (6)$$

де φ,ψ - функції пористості.

Якщо врахувати, що

$$\dot{e}_r = \dot{e} - \dot{e}_z - \dot{e}_\varphi \, ,$$

то рівняння (6) приймає вид

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(\dot{e}_\varphi + \dot{e}_z\right)(1-\theta)}{\frac{2}{3} - \frac{\psi}{\varphi}} \, . \quad (7)$$

При відомих експериментальних залежностях $\dot{e}_r(t), \dot{e}_\varphi(t), \dot{e}_z(t)$ диференціальні рівняння (6) і (7) розв'язували чисельно відносно невідомої функції θ(t). Порівняння експериментальних результатів, отриманих при гідрозважуванні з розрахунковими, отриманими при осадці пористих заготовок показали, що розрахунковий метод менш трудомісткий ніж гідрозважування. Розходження отриманих результатів не перевищує похибок вимірювань.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Shtern, M. B., Mikhailov, O. V., & Mikhailov, A. O. Generalized continuum model of plasticity of powder and porous materials. *Powder Metallurgy and Metal Ceramics*, 2021, 60(1-2), 20-34. doi:10.1007/s11106-021-00211-7.

2. Sivak, R., Kulykivskyi, V., Savchenko, V., Minenko, S., Borovskyi, V. Determination of porosity functions in the pressure treatment of iron-based powder materials in agricultural engineering. *Scientific Horizons*. 2023, 26(3), pp. 124–134. DOI:10.48077/scihor3.2023.124.

3. Sakharov, D. V., Sivak, I. O., Pokras, V. D., Ivatsko, V. T. The peculiarities of application of viscoplasticity method to computation of porous bodies stress state. *Poroshkovaya Metallurgiya*, 2000, (3-4), pp. 10–21.



***Сивак Роман Іванович, доктор технічних наук, професор, професор кафедри галузевого машинобудування, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, sivak_r_i@ukr.net.***

***Балагур Данило Віталійович, студент, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, den160704study@gmail.com.***


## DETERMINATION OF KINEMATIC CHARACTERISTICS OF PLASTIC DEFORMATION OF POROUS BODIES


**Abstract**

*An approach is proposed, which consists in a certain sequence of calculating the derivatives of the coordinates of the nodes with respect to time in combination with the methods of the theory of numerical functions of real variables. All calculations are performed in Euler variables, which eliminates the need to transition from Lagrangian variables to Euler ones and simplifies the solution of the problem. In addition, this technique allows working with an irregular and non-rectangular grid in areas with any shape of boundaries. This approach is more effective in terms of approximation accuracy and calculation speed..*



**Key words**: porous body, approximation, spline, deformed state, stationary and unsteady deformation.



***Roman Sivak, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Industrial Mechanical Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, sivak_r_i@ukr.net.***

***Balagur Danylo, student, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, den160704study@gmail.com.***

ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПОРИСТИХ ТІЛ

**Анотація**

*Запропоновано підхід, який полягає в певній послідовності обчислення похідних від координат вузлів по часу в поєднанні з методами теорії числових функцій дійсних змінних. Всі розрахунки виконані в ейлерових змінних, що виключає необхідність переходу із лагранжевих змінних в ейлерові і спрощує розв'язок задачі. Крім того, така методика дозволяє працювати з нерегулярною і непрямокутною сіткою в областях з будь-якою формою границь. Такий підхід є більш ефективним, з точки зору точності апроксимації, а також швидкості обчислень.*

**Ключові слова:** пористе тіло, апроксимація, сплайн, деформований стан, стаціонарне і нестаціонарне деформування.

***Сивак Роман Іванович, доктор технічних наук, професор, професор кафедри галузевого машинобудування, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, sivak_r_i@ukr.net.***

***Балагур Данило Віталійович, студент, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, den160704study@gmail.com.***