

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ ТІЛ

<sup>1</sup>Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана П.Сагайдачного,

<sup>2</sup>Національний університет «Львівська політехніка»

### Анотація

Для опису складних коливань пружних тіл застосовується аналітично-експериментальний метод. Цей метод полягає в тому, що відома раніше інформація про одну з форм коливань використовується при побудові математичних моделей інших форм. Аналізується застосування ідей методів збурень (методу Ван-дер-Поля) та теорії спеціальних періодичних Атеб-функцій стосовно побудови аналітичних розв'язків відповідних систем диференціальних рівнянь.

**Ключові слова:** динаміка, коливання, математична модель, нелінійність.

У переважній більшості випадків пружні елементи машин і механізмів здійснюють складні коливання – поєднання в різних комбінаціях двох або трьох простих: згинальних, поздовжніх і крутильних. Таке поєднання декількох рухів зумовлює значні труднощі при аналітичному дослідженні динаміки процесів у пружних елементах. У загальному випадку математичними моделями таких складних процесів у пружних тілах навіть у випадку одновимірних розрахункових моделей є крайові задачі для систем диференціальних рівнянь у частинних похідних. Аналітичні дослідження коливальних процесів у них є складною математичною проблемою, чисельна ж симуляція таких математичних моделей не дає відповідей на низку практичних питань, зокрема, щодо зовнішніх і внутрішніх резонансів. Для часткового розв'язання цієї проблеми розроблено аналітико-експериментальний метод, основні ідеї якого полягають у наступному: наперед відому інформацію про одну із форм коливань використовують при побудові математичних моделей інших [1]. Це певною мірою спрощує математичну модель динаміки процесу розглядуваного пружного тіла. До того ж, якщо апріорна інформація описує динаміку процесу малих коливань у порівнянні з іншими, то для опису невідомих форм коливань достатньо ефективними методами дослідження є асимптотичні методи нелінійної механіки [2], які ґрунтовно розроблені для нелінійно пружних тіл [3–5].

Резонансні явища в пружних тілах, які здійснюють згинальні та крутильні коливання, вивчалися, наприклад, у праці [6]. Для випадку проведення динамічного розрахунку пружних елементів складних інженерних конструкцій відповідна методика запропонована в роботі [7].

Особливо ефективним виявилось застосування ідей методів збурень (методу Ван-дер-Поля) та теорії спеціальних періодичних Атеб-функцій стосовно побудови аналітичних розв'язків систем диференціальних рівнянь, які описують нелінійні математичні моделі динаміки руху транспортних засобів у залежності від умов їх руху, характеристик системи підресорювання, типу коливань, наприклад, [8, 9].

Отримані результати можуть бути базою для вибору оптимальних режимів роботи машин і механізмів з метою уникнення в них резонансних явищ, втрати стійкості тощо.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Сокіл Б. І. Методологія дослідження поздовжньо-згинальних коливань пружних тіл із використанням часткової інформації про них / Б. І. Сокіл, А. П. Сенік, М. Б. Сокіл, А. І. Андрухів // Міжнародний науковий журнал «Грааль науки». – 2021. – № 9 (жовтень). – С. 233 – 240.
2. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
3. Митропольский Ю. А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский, Б. И. Моисеенков. – Киев: Вища школа, 1976. – 584 с.
4. Митропольский Ю. О., Сокіл Б. І. Про застосування Атеб-функцій для побудови асимптотичного розв'язку збуреного нелінійного рівняння Клейна-Гордона // Український математичний журнал. – 1998. – Т. 50. – № 5. – С. 665 – 670.

5. Andrukhiv A., Sokil B., Sokil M. Resonant phenomena of elastic bodies that perform bending and torsion vibrations. Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science. – 2018. – Vol. 4. – No 2. – P. 58 – 67.

6. Andrukhiv A., Sokil M., Fedushko S., Syerov Y., Kalambet Y. and Peracek T. (2021) Methodology for increasing the efficiency of dynamic process calculations in elastic elements of complex engineering constructions // Electronics (Switzerland). – 10 (1). – P. 1 – 20. Doi: 10.3390/electronics10010040.

7. Andrukhiv A., Huzyk N., Sokil B. and Sokil M. (2023) Methodology of investigation the dynamics of longitudinally moving systems under the action of impulse perturbations. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 1277 012005. DOI 10.1088/1757-899X/1277/1/012005.

8. Сокіл Б. Резонансні поздовжньо-кутові коливання колісних транспортних засобів із нелінійною характеристикою системи підресорювання / Б. Сокіл, Я. Романчук, М. Сокіл, А. Баранов. – Збірник наукових праць Національної академії державної прикордонної служби України. Серія: військові та технічні науки. 2022. – № 1,2 (78). С. 246 – 265. <https://doi.org/10.32453/3.v87i1-2.1093>.

9. Сокіл Б.І., Сокіл М.Б., Романчук Я.П. Динаміка підресореної частини КТЗ і стійкість руху. Автошляховик України: науково-виробничий журнал. – 2023. – № 1 (273). – С. 53 – 60.

**Сокіл Богдан Іванович**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інженерної механіки Національної академії сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного, Львів, sokil\_b\_i@ukr.net.

**Романчук Ярослав Петрович**, кандидат фізико-математичних наук, ст.н.с., доцент кафедри інженерної механіки Національної академії сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного, Львів, romanchuky@ukr.net.

**Сокіл Марія Богданівна**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри транспортних технологій Національного університету «Львівська політехніка», Львів, mariia.b.sokil@lpnu.ua.

## MATHEMATICAL MODELS AND ANALYTICAL METHODS OF INVESTIGATION OF COMPLEX OSCILLATIONS OF ELASTIC BODIES

### Abstract

*An analytical-experimental method is used to describe complex vibrations of elastic bodies. This method consists in the fact that previously known information about one of the forms of oscillations is used in the construction of mathematical models of other forms. The application of the ideas of perturbation methods (the Van der Pol method) and the theory of special periodic Ateb functions in relation to the construction of analytical solutions of the corresponding systems of differential equations is analyzed.*

**Keywords:** dynamics, oscillations, mathematical model, nonlinearity.

**Bohdan Sokil**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Engineering Mechanics of the National Academy of Land Forces named after Hetman P. Sahaidachny, Lviv, sokil\_b\_i@ukr.net.

**Yaroslav Romanchuk**, Candidate of physical and mathematical Sciences, Associate Professor, and Department of Engineering Mechanics of the National Academy of Land Forces named after Hetman P. Sahaidachny, Lviv, romanchuky@ukr.net.

**Maria Sokil**, Candidate of Philology Technical Sciences, Associate Professor, Department of Transport Technologies of the National University "Lviv Polytechnic", Lviv, mariia.b.sokil@lpnu.ua.