

РОЗРОБЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ДОВГОМІРНИМИ БАЛКОВИМИ І КАНАТНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, Україна

Анотація Розглянуто проблеми комп'ютерного моделювання механічних систем з балковими та канатними елементами, таких як різноманітні підйомні машини чи канатні транспортні системи. Для довгих балкових конструкцій, що володіють відносно високою гнучкістю, необхідно враховувати значні деформації та стискаючі зусилля, а для канатних елементів – жорсткість на згин. Для цього розроблено скінченно-елементні моделі на основі сплайн-апроксимації кривих деформації елементів.

Ключові слова: балка; канат; скінченно-елементні моделі; сплайн-апроксимація

Розглядаються проблеми розроблення комп'ютерно-орієнтованих математичних моделей механічних систем з довгомірними балковими і канатними елементами такі як різноманітні вантажопідіймальні машини або канатні транспортуючі системи [1,2], які працюють в умовах значних статичних і динамічних навантажень.

Сучасні розрахункові моделі механічних систем, що включають довгомірні балкові і канатні елементи як правило формуються на основі їх дискретизації і застосування методу скінченних елементів, однак вони формуються для кожної конкретної механічної системи індивідуально і не можуть бути повністю формалізованими.

Для довгомірних балкових конструкцій, з відносно великою податливістю, необхідно враховувати значні деформації і стискаючі зусилля, а для канатних елементів згинну жорсткість. Для цього розроблені скінченно-елементні моделі на основі сплайн апроксимації кривих деформації елементів.

Запропоновано представлення кривої згину балкового елемента у вигляді апроксимації кубічними сплайнами через дискретні значення у вузлах y_i [3].

$$y(x) = \sum_{j=1}^n v_{i,j}(x) \cdot y_i, \quad y'(x) = \sum_{j=1}^n v'_{i,j}(x) \cdot y_i, \quad y''(x) = \sum_{j=1}^n v''_{i,j}(x) \cdot y_i.$$

Відповідні пружні і інерційні коефіцієнти дискретної моделі балкового елемента матимуть вигляд

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} EJ_k(x) \cdot v''_{k,i}(x) \cdot v''_{k,j}(x) \cdot dx, \quad a_{i,j} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} m_k(x) \cdot v_{k,i}(x) \cdot v_{k,j}(x) \cdot dx.$$

Тут: $EJ_k(x)$ і $m_k(x)$ відповідно згинна жорсткість і погонна маса ділянки дискретної моделі балки.

Розроблений алгоритм і комп'ютерні програми обчислення коефіцієнтів матриць жорсткості C і інерції A як для балок постійного перерізу та і змінних по довжині параметрів. В останньому випадку інтегрування у вищенаведених виразах виконується числовими методами. Коректність розроблених комп'ютерних програм перевірені на прикладах балок з відомими точними розв'язками. При цьому точність дискретних моделей на основі запропонованої сплайн апроксимації виявилась на порядок вища ніж у випадку лінійної апроксимації кривої згину.

Окрім поперечних навантажень балкові елементи сприймають ще й значні поздовжні зусилля і тому пружні параметри дискретної балкової моделі необхідно доповнити параметрами, що враховують ефект поздовжнього стиску. Для цього вводиться матриця геометричної жорсткості G , яка залежить від внутрішніх поздовжніх зусиль і тоді результуюча матриця пружності C' матиме вигляд

$$C' = C + G.$$

Для дискретних балкових елементів коефіцієнти матриці геометричної жорсткості G можна одержати за допомогою енергетичних залежностей. Зміна потенціалу поздовжніх сил дискретного балкового елемента відповідно дорівнює

$$U_G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} N(x) \cdot [y'(x)]^2 \cdot dx.$$

Відповідні коефіцієнти геометричної жорсткості визначаються з умови

$$g_{i,j} = \frac{\partial^2 U_G}{\partial y_i \partial y_j}.$$

Використавши представлення першої похідної прогинів на ділянках балки апроксимуючими функціями на основі сплайн апроксимації кривої згину одержимо

$$g_{i,j} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} N_k(x) \cdot v'_{k,i}(x) \cdot v'_{k,j}(x) \cdot dx.$$

У той же час метод, оснований на використанні матриці геометричної жорсткості G для дискретних балкових моделей, дозволяє організувати достатньо точний і ефективний розрахунок на стійкість балкових елементів при навантаженні їх поздовжньою силою P .

З матриці G може бути виділена в якості загального множника сила P , а саме $G = P \cdot G'$, де G' це матриця геометричної жорсткості при $P = 1$.

Таким чином задача визначення критичної сили, що відповідає втраті стійкості балки, може бути представлена у вигляді

$$\det \left(C^{-1} \cdot G - \frac{1}{P_{kr}} \cdot E \right) = 0$$

де C – елементи матриці пружних коефіцієнтів дискретної моделі балки, а E – одинична матриця. Таким чином сила, що відповідає втраті стійкості балки P_{kr} визначається як найбільше власне значення матриці $C^{-1} \cdot G$.

Дискретна балкова модель з врахуванням поздовжнього навантаження може бути використана для моделювання канатних елементів, навантажених розподіленими та зосередженими поперечними зусиллями з врахуванням згинної жорсткості канату.

На основі наведених алгоритмів розроблена система комп'ютерних програм деформаційного розрахунку механічних систем з балковими і канатними елементами і розрахунку на стійкість балок. Комп'ютерна процедура виконується в діалоговому режимі і дозволяє оперативно міняти вхідні дані і в тому числі довжини і кількість ділянок дискретизації елементів, що дозволяє оцінювати похибку і надійність результатів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гелетій В.М. Розрахунок довгомірних металоконструкцій кранів з врахуванням геометричної нелінійності. / Вісник НУ «Львівська політехніка». «Динаміка, міцність та проектування машин і приладів.» 2011 р. № 701, с. 12.
2. Гелетій В.М., Ланець О.В. Моделювання динаміки канатних систем для підвищення ефективності технологічних операцій. Матеріали доповідей VIII Міжнародної науково-технічної конференції «Прогресивні технології в машинобудуванні РТМЕ-2019» 4-8 лютого 2019 р. – Івано-Франківськ – Яремча. 2019. – 116-117с..
3. Клаф Р., Пензиен Дж. Динаміка сооружений: пер. с англ. –М.. Стройиздат, 1979.320 с.

Гелетій Володимир Миколайович к.т.н., доцент, Національний університет Львівська політехніка, heletiy.v@gmail.com

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODELS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH LONG-DIMENSIONAL BEAM AND ROPE ELEMENTS

Abstract Problems of computer modeling of mechanical systems with long beam and rope elements such as various hoisting machines or rope transport systems are considered. For long beam structures, with relatively high flexibility, it is necessary to take into account significant deformations and compressive forces, and for rope elements bending stiffness. For this purpose, finite element models based on spline approximation of element deformation curves are developed

Keywords: beam, rope; finite element models; spline approximation

Heletiy Volodymyr Ph.D., associate professor, Lviv Polytechnic National University, heletiy.v@gmail.com