

# АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ ТІЛ, ЯКІ ОБЕРТАЮТЬСЯ НАВКОЛО НЕРУХОВОЇ ОСІ

<sup>1</sup> Національний університет «Львівська політехніка»

## Анотація

Розроблено методику дослідження згинних коливань пружного одновимірного тіла з урахуванням кутової швидкості його обертання навколо нерухомої осі та відносного руху вздовж нього однорідного середовища. Отримані рівняння у стандартному вигляді, які визначають основні параметри нелінійних коливань тіла.

**Ключові слова:** частота, дисперсійне співвідношення, хвильовий розв'язок, асимптотичний метод.

## Вступ

Дослідження динамічних процесів у різних середовищах і системах на підставі асимптотичних підходів та хвильової теорії руху набули останнім часом широкого поширення [1-3]. Основні ідеї хвильової теорії широко використовуються в тих прикладних задачах, де не завжди вдається застосувати класичні методи інтегрування рівнянь з частинними похідними. Це стосується в першу чергу завдань, що описують динамічні процеси в поздовжньо-рухомих середовищах: поздовжні та згинні коливання ременних, канатних або ланцюгових передач, трубопроводів, по яких переміщується рідина, шнекових машин, вздовж яких рухається в'язке або сипуче середовище, в певній мірі процес віброізоляції та ін. Поздовжня складова швидкість руху середовища впливає не тільки на кількісні характеристики динаміки наведених систем, але може істотно вплинути також на якісний бік процесу - призвести до зриву коливань або до їх нестійкості тощо. Наведені міркування підтверджують актуальність та практичну цінність досліджень зі вказаної тематики.

## Результати дослідження

Досліджено математичну модель згинальних коливань пружного тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю і вздовж якого рухається з постійною відносною лінійною швидкістю середовище (рідина, сипуча або в'язка середовище). Вказану модель записано у вигляді системи рівнянь

$$(\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho_2 V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} - 2(\rho_1 + \rho_2) \Omega \frac{\partial w}{\partial t} - (S - \rho_2 V^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - M \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} -$$

$$- 2(\rho_1 + \rho_2) I \Omega \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - (\rho_1 + \rho_2) \Omega^2 u = \varepsilon f \left( u, w, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}, \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \right),$$

$$(\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho_2 V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} + 2(\rho_1 + \rho_2) \Omega \frac{\partial u}{\partial t} - (S - \rho_2 V^2) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - M \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} +$$

$$+ 2(\rho_1 + \rho_2) I \Omega \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - (\rho_1 + \rho_2) \Omega^2 w = \varepsilon g \left( u, w, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}, \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \right).$$

У цій системі рівнянь  $u(t, z), w(t, z)$  - компоненти вектора переміщення точки пружного одновимірного тіла в довільний момент часу  $t$  в проєкціях на осі рухомої системи координат  $Oxuz$ , вісь  $Oz$  якої збігається з недеформованим прямолінійним його станом,  $\rho_1, \rho_2$  - відповідно маса

одиниці довжини тіла і середовища, що рухається,  $S$  - зусилля розтягу,  $M$  - момент кручення;  $\Omega$  - кутова швидкість обертання тіла навколо осі, що впадає з її недеформованим положенням;  $EI$  - згинна жорсткість тіла;  $f$  і  $g$  - функції, що описують нелінійні складові відновлюючої сили, сили опору та інші сили, максимальне значення яких значно менше значення відновлюючої сили, на що вказує малий параметр  $\varepsilon$ . Додатково до системи рівнянь долучено крайові умови типу шарнірно закріплених кінців.

Розроблена методика дослідження класів коливальних систем - пружних тіл, що по-перше обертаються навколо нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю (колони для буріння свердловин, шнекові машини тощо) і, по-друге, вздовж яких рухається середовище. Методика базується на основній ідеї асимптотичного інтегрування рівнянь з частинними похідними, яка поєднує в собі основні положення хвильової теорії руху, принцип одночастотності коливань у нелінійних системах. Отримано визначальні характеристики динамічного процесу як у резонансному, так й у нерезонансному випадках.

### Висновки

Розроблена в роботі методика дозволяє визначити вплив широкого спектру зовнішніх і внутрішніх факторів на згинні коливання пружних одновимірних моделей тіл, що обертаються навколо нерухомої осі.

Отримані залежності показують:

а) для великих значень кутової швидкості обертання власна частота коливань пружного тіла менша; швидкість падіння частоти власних коливань із зростанням відстані між опорами є більшою для великих значень швидкості рідини;

б) вплив швидкості руху середовища на власні коливання більшою мірою проявляється для більшого значення міжопорної відстані;

в) при значеннях кутової швидкості  $\Omega_{кр} = \sqrt{\frac{(S - \rho_2 V^2) + EI\kappa^2}{(\rho_1 + \rho_2)(2I - \kappa^2 I^2)}}$  та швидкості руху рідини  $V_{кр} = \sqrt{\frac{\Omega^2(\kappa^2 I^2 - 2I)(\rho_1 + \rho_2) + EI\kappa^2 + S}{\rho_2}}$  відбувається зрив динамічного процесу.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Pukach P. Ya. Asymptotic method for investigating resonant regimes of nonlinear bending vibrations of elastic shaft / P. Ya. Pukach, I. V. Kuzio, Z. M. Nytrebych, V. S.Ilkiv.- Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu.- 2018.- № 1.- P. 68-73.
2. Slipchuk A. Advancing asymptotic approaches to studying the longitudinal and torsional oscillations of a moving beam / A. Slipchuk, P. Pukach, M. Vovk, O. Slyusarchuk.-Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.- 2022.- 3(7-117).- P. 31-39.
3. Slipchuk A. Asymptotic Study of Longitudinal Velocity Influence and Nonlinear Elastic Characteristics of the Oscillating Moving Beam / A.Slipchuk, P. Pukach, M. Vovk. - Mathematics.- 2023.- 11.- 322.

**Пукач Петро Ярославович** — доктор техн. наук, професор, директор Інституту прикладної математики та фундаментальних наук, Національний університет «Львівська політехніка»

*Asymptotic methods of investigating nonlinear bending oscillations of bodies rotating around a motionless axis*

#### Abstract

A methodology for studying bending vibrations of an elastic one-dimensional body has been developed. The angular velocity of its rotation around a fixed axis and the relative movement along it of a homogeneous medium were taken into account. Equations, which determine the main parameters of nonlinear body vibrations, were obtained in the standard forms.

**Keywords:** frequency, dispersion relation, wave solution, asymptotic method.

**Pukach Petro Ya.** — Doctor of Tech. Sciences, Professor, Director of the Institute of Applied Mathematics and Fundamental Sciences, Lviv Polytechnic National University