Абросов Ю.Ю.
Максимюк В.А.

МЕТОД РОЗРАХУНКУ ДЕФОРМУВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ З НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИХ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ

Анотація. *Класичний підхід до виведення рівнянь теорії тонких оболонок на основі гіпотез Кірхгофа-Лява з використанням функціонала Лагранжа призводив до появи других похідних під інтегралом, що суттєво ускладнювало процес дискретизації при застосуванні варіаційно-різницевих методів (ВРМ). Розділення класичного функціоналу на лінійну і нелінійну частини, використання в лінійній частині множників Лагранжа для реалізації гіпотез Кірхгофа-Лява і подібного підходу для уникнення мембранного замикання, дозволяє вирішувати задачу в рамках лінійної теорії оболонок. Лінеаризація функціоналу, використання методу послідовних наближень (МПН) і ВРМ дають більш алгоритмічний підхід як до побудови системи рівнянь, так і до їх чисельного розв'язання при незначному збільшенні обчислювальних витрат.*

Ключові слова: *еліптичний циліндр, напружено-деформований стан, мембранне замикання, нелінійно-пружний композит, варіаційно-різницевий метод.*

Застосування нелінійно-пружних композитних матеріалів для виготовлення циліндричних оболонок веде до необхідності врахування в теорії оболонок нелінійних властивостей композитів [1], а некругова форма поперечного перерізу оболонки - ще й до врахування можливого мембранного замикання (locking).

В декартовій системі координат (x, y, z) рівняння серединної поверхні оболонки з півосями еліпса a і b має вигляд [2]

$$F(x,y)=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-1=0\,. \tag{1}$$

Віднесемо цю поверхню до криволінійної системи координат (s,z,γ), в якій координата γ направлена вздовж нормалі до поверхні, а s є довжиною дуги еліпса, що відраховується від точки ($x=0,\ y=b$). Нелінійні фізичні співвідношення в довгій оболонці ($e_{zz}=0$) за плоского напруженого стану для простих навантажень згідно з теорією пластичності анізотропних середовищ [3] матимуть вигляд:

$$\left(\frac{1}{E_{ss}}+\Psi q_{ss}\right)\sigma_{ss}+\left(-\frac{\nu_{sz}}{E_{zz}}+\Psi q_{sz}\right)\sigma_{zz}=e_{ss}\,,$$

$$\left(-\frac{\nu_{zs}}{E_{zz}}+\Psi q_{zs}\right)\sigma_{ss}+\left(\frac{1}{E_{zz}}+\Psi q_{zz}\right)\sigma_{zz}=0\,, \tag{2}$$

де e_{ss} – колова деформація; σ_{ss} і σ_{zz} – компоненти колових і поздовжніх напружень; E_{ss}, E_{zz} та ν_{sz}, ν_{zs} – модулі пружності та коефіцієнти поперечної деформації ортотропного матеріалу. Нелінійні властивості матеріалу в (2) описуються функцією [1] $\Psi\ (f\ )$, де f – квадратична функція напружень, з коефіцієнтами, що є компонентами тензора, що враховує анізотропію нелінійних властивостей. Система рівнянь (2) є суттєво нелінійною, розв'язати її відносно напружень можна чисельно за допомогою методу Ньютона. З огляду на застосування в подальшому МПН в напруженнях виділяються, як доданки, нелінійні та лінійні члени

$$\sigma_{ss}^N=\sigma_{ss}-\sigma_{ss}^L;\quad \sigma_{zz}^N=\sigma_{zz}-\sigma_{zz}^L;\quad \sigma_{ss}^L=\frac{E_{ss}}{1-\nu_{sz}\nu_{zs}}e_{ss};\quad \sigma_{zz}^L=\nu_{sz}\sigma_{ss}^L. \tag{3}$$

Відповідно до (3) середні по товщині оболонки внутрішні зусилля T_{ss}, T_{zz} та момент M_{ss} також подаються у вигляді суми лінійних та нелінійних доданків [1].

Моделювання напружено-деформованого стану оболонки базується на основі варіаційних принципів з використанням змішаного функціонала [1, 3]. Виходячи з принципу віртуальної роботи, вважаючи, що згідно з МПН у формі додаткових напружень величини нелінійних складових відомі з попереднього наближення і не варіюються, варіаційне рівняння можна подати у вигляді

$$\delta\Pi = \delta\left(\Pi^L + \Pi^N\right) = 0,$$

де $$\Pi^L = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\left(T_{ss}^L\varepsilon_{ss} + T_{zz}^L\varepsilon_{zz} + M_{ss}^L\kappa_{ss}\right)d\Omega - \iint\limits_{\Omega} pw\,d\Omega + \iint\limits_{\Omega} T_{s\gamma}^f\varepsilon_{s\gamma}\,d\Omega - \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} C_{ss}(\varepsilon_{ss} - \varepsilon_{ss}^f)^2\,d\Omega,$$

$$\Pi^N = \iint\limits_{\Omega}\left(T_{ss}^{Nf}\varepsilon_{ss} + T_{zz}^{Nf}\varepsilon_{zz} + M_{ss}^N\kappa_{ss}\right)d\Omega.$$

Функціонал $\Pi\left(u, w, \phi, T_{s\gamma}^f, \varepsilon_{ss}^f\right)$ залежить від чотирьох варійованих функцій: двох переміщень, кута повороту, зусилля $T_{s\gamma}^f$, яке має фізичний зміст перерізуючої сили, та колової деформації-функції ε_{ss}^f. Переваги такої побудови функціонала викладено в [3].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Концентрация напряжений / Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др. – К.: “А.С.К.”, 1998. – 387с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т. 7).
2. Abrosov Yu.Yu., Maximyuk V.A., Chernyshenko I.S. Physically Nonlinear Deformation of a Long Orthotropic Cylindrical Shell with Elliptic Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 3. – P. 282 – 289.
3. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational Finite-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells (review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 6. – P. 613 – 687.

Абросов Юрій Юрійович, здобувач н.с., м.н.с., Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ, м.Київ, abrosovyuriy@gmail.com

Максимюк Володимир Ананійович, доктор ф.-м.н., професор, п.н.с., Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ, м.Київ, volodymyr@inet.ua

THE CALCULATING METHOD OF CYLINDRICAL SHELL DEFORMATION WITH ELLIPTICAL CROSS SECTION FROM NONLINEAR-ELASTIC COMPOSITE MATERIALS

Abstract. *The classical approach to obtain the equations of the theory of thin shells based on the Kirchhoff–Love hypotheses using the Lagrange functional led to the appearance of second derivatives under the integral, which significantly complicated the discretization process when applying the variational-difference method (VDM). The classical functional division into linear and nonlinear parts, Lagrange multipliers usage in the linear part to implement the Kirchhoff–Love hypotheses and a similar approach to avoid membrane locking allows to solve the problem within the framework of the linear theory of shells. The linearization of the functional, usage of the method of successive approximations and VDM provide a more algorithmic approach both to the construction of a system of equations and to their numerical solution with a slight increase in computational costs.*

Keywords: *elliptical cylinder, stress-strain state, membrane locking, nonlinear-elastic composite, variational-difference method.*

Abrosov Yu.Yu., degree seeker, junior researcher, Institute of Mechanics named by S.P. Tymoshenko, NASU, Kyiv, abrosovyuriy@gmail.com

Maksymiuk V. A., doctor of physical and mathematical sciences, professor, leading researcher, Institute of Mechanics named by S.P. Tymoshenko, NASU, Kyiv, volodymyr@inet.ua