

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ ТІЛ

¹Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана П.Сагайдачного,
²Національний університет «Львівська політехніка»

Анотація

Для опису складних коливань пружних тіл розроблений аналітично-експериментальний метод. Цей метод полягає в тому, що відома раніше інформація про одну з форм коливань використовується при побудові математичних моделей інших. Це певною мірою спрощує математичну модель динаміки процесу досліджуваного пружного тіла.

Ключові слова: динаміка, коливання, математична модель, нелінійність.

У процесі експлуатації машин та механізмів найпростіші їх пружні елементи під дією зовнішніх та внутрішніх чинників здійснюють складні коливання – поєднання у різних комбінаціях поздовжніх, згинальних та крутильних. У загальному випадку математичними моделями процесу таких складних процесів пружних тіл навіть для одновимірних розрахункових моделей є крайові задачі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними. Дослідити аналітично процеси у таких тілах є складною математичною проблемою, чисельна ж симуляція вказаних математичних моделей не дає відповідей на низку практичних питань: це в першу чергу питання зовнішніх та внутрішніх резонансів. Для часткового розв'язання вказаної проблеми розроблено аналітично-експериментальний метод основні ідеї якого полягають у наступному: наперед відому інформацію про одну із форм коливань використовують під час побудови математичних моделей інших. Це у певній мірою спрощує математичну модель динаміки процесу розглядуваного пружного тіла. До того, якщо апріорна інформація описує динаміку процесу малих коливань у порівнянні із іншими, то для опису невідомих форм коливань достатньо ефективними методами дослідження є асимптотичні методи нелінійної механіки [1], які ґрунтовно розроблені для нелінійно пружних тіл [2]. Основну ідею вказаної методології у роботі узагальнено на нові класи систем, систем, які піддаються дії імпульсних збурень. Її викладено на прикладі пружного тіла, яке обертається з кутовою швидкістю Ω здійснюючи крутильні та поздовжні коливання. Щодо зовнішніх дій, то вони зумовлені взаємодією тіла із зовнішнім середовищем під час його обертання в окремих точках, а відтак характеризуються імпульсними моментами. Крім цього, вважається, що основні характеристики поздовжніх коливань є відомими і описуються функції $u(z,t)$. Приймаючи для таких складних процесів у пружному тілі крутильні коливання за переносний рух, і відповідно, поздовжні - за відносний, диференціальне рівняння крутильних коливань такого пружного тіла можна привести до вигляду

$$\frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial t^2} - \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{I_z} \left[2m\Omega u \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1} F_i \left(z, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \delta(z - z_i) \delta(t - t_i) \right]. \quad (1)$$

В (1) I_z - погонний момент інерції відносно осі обертання тіла, G - модуль зсуву, $\delta(z - z_i)$, $\delta(t - t_i)$ - дельта функції Дірака [3,4] лінійної та часової змінних, $F_i \left(z, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$ - нелінійні за сукупністю змінних функції, які характеризують величини дії у точках з координатою z_i , в момент часу t_i , m - маса одиниці довжини пружного тіла, $2m\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u dz$ - момент відносно осі обертання коріолісової сили інерції елемента пружного тіла.

Вказане рівняння, для простоти, будемо розглядати за однорідних крайових умов

$$\theta(z,t)|_{z=0} = \theta(z,t)|_{z=l} = 0. \quad (2)$$

Права частина рівняння (1) за величиною є значно менша від другого доданку лівої частини. Останнє обмеження, на перший погляд, є підставою для застосування загальних ідей методів збурень при побудові одночастотного розв'язку крайової задачі (1), (2). Однак права частина рівняння (1) є

дискретною функцією за лінійною та часовою змінними. Тому для застосування вказаних вище методів треба провести регуляризацію правої частини вказаного рівняння. Щодо регуляризації її за лінійною змінною, то тут методика відома і вона базується на властивостях повноти та ортонормованості системи власних функцій, які описують форми крутильних коливань незбуреного руху. Набагато складніша задача регуляризації правої частини за часовою змінною. На базі використання основних властивостей дельта-функцій та спеціальної заміни зміни вдалось провести вказану процедуру і за часовою змінною, а відтак отримати рівняння, які описують амплітудо-частотну характеристику крутильних коливань пружного тіла. Їх особливістю є те, що вони залежать від основних параметрів (амплітуди та частоти) поздовжніх коливань та зовні нього збурення. Розглянуто важливий практичний випадок, випадок дії імпульсних моментів у фіксованій точці пружного тіла через рівні проміжки часу. Для нього зокрема встановлено:

- у пружному тілі можуть існувати резонансні явища зумовлені періодичним імпульсним моментом, та взаємним впливом одних коливань на інші;
- амплітуда крутильних коливань під час переходу через резонанс за малих кутових швидкостей обертання є більшою;
- резонансні явища зумовлені згинальними коливаннями пружного тіла можуть мати місце на непарних мод крутильних коливань.

Отримані результати можуть бути базою для вибору режимів роботи машин та механізмів з метою уникнення у них резонансних процесів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. / – М.: Наука, 1974. – 501 с.
2. Митропольский Ю. А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский., Б. И. Мосеенков. – Киев: Вища школа, 1976. – 584 с.
3. Дельта-функция. “Математика” [электронный ресурс]. URL: <https://math.world.wolfram.com/DeltaFunction.html>. Дельта-функция. “Математика” [html электронный ресурс]. URL: <https://math.world.wolfram.com/DeltaFunction>.
4. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными / О. А. Олейник. – Москва: Бинум, 2005. – 60с.

Сокіл Богдан Іванович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інженерної механіки Національної академії сухопутних військ ім. гетьмана П. Сагайдачного, Львів, sokil_b_i@ukr.net.

Сеник Андрій Петрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Національного університету «Львівська політехніка», Львів, andrij.p.senyk@lpnu.ua.

Сокіл Марія Богданівна, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри транспортних технологій Національного університету «Львівська політехніка», Львів, mariia.b.sokil@lpnu.ua.

Андрухів Андрій Ігорович, кандидат технічних наук, директор науково-технічної бібліотеки Національного університету «Львівська політехніка», Львів, andriy.i.andrukhiv@lpnu.ua.

MATHEMATICAL MODELS AND ANALYTICAL METHODS OF INVESTIGATION OF COMPLEX OSCILLATIONS OF ELASTIC BODIES

Abstract

An analytical-experimental method has been developed to partially solve the description of complex oscillations. This method consists in the fact that previously known information about one of the forms of oscillations is used in the construction of mathematical models of others. This to some extent simplifies the mathematical model of the dynamics of the process of the studied elastic body.

Keywords: dynamics, oscillations, mathematical model, nonlinearity.

Bohdan Sokil, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Engineering Mechanics of the National Academy of Land Forces named after Hetman P. Sagaidachny, Lviv, sokil_b_i@ukr.net.

Andriy Senyk, Candidate of Philology physical and mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Lviv Polytechnic National University, Lviv, andrij.p.senyk@lpnu.ua.

Maria Sokil, Candidate of Philology Technical Sciences, Associate Professor, Department of Transport Technologies of the National University "Lviv Polytechnic", Lviv, mariia.b.sokil@lpnu.ua.

Andriy Andrukhiv, Candidate of Philology Technical Sciences, Director of the Scientific and Technical Library of the National University "Lviv Polytechnic", Lviv, andriy.i.andrukhiv@lpnu.ua.