

СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ ЯК ІНСТРУМЕНТ ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

¹ Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба

Анотація

У статті розглядається роль сучасних систем комп'ютерної математики (СКМ) у процесі розробки, верифікації та математичного аналізу алгоритмів машинного навчання. Проаналізовано синергію між символьними обчисленнями та чисельними методами оптимізації. Продемонстровано прикладну цінність використання СКМ для дослідження збіжності градієнтних методів та аналізу архітектур нейронних мереж..

Ключові слова: системи комп'ютерної математики, машинне навчання, градієнтний спуск, оптимізація, символьні обчислення, математичне моделювання.

Abstract

Keywords: computational mathematics systems, machine learning, gradient descent, optimization, symbolic computations, mathematical modeling.

Keywords: computational mathematics systems, machine learning, gradient descent, optimization, symbolic computations, mathematical modeling.

Вступ

Стрімкий розвиток технологій штучного інтелекту та машинного навчання (Machine Learning — ML) висуває нові вимоги до теоретичного обґрунтування та верифікації нових алгоритмів. Більшість сучасних архітектур, від класичних лінійних регресій до глибоких нейронних мереж, базуються на фундаментальних концепціях математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії ймовірностей та математичної статистики. У цьому контексті системи комп'ютерної математики (СКМ), такі як MATLAB, Wolfram Mathematica, Maple, а також спеціалізовані екосистеми символьної математики на базі Python (SymPy), перетворюються з простих калькуляторів на потужні інструменти наукового пошуку, що дозволяють автоматизувати рутинні аналітичні викладки та досліджувати складні математичні залежності.

Результати дослідження

Ядром практично будь-якого алгоритму навчання з учителем є мінімізація функції втрат. Для оптимізації параметрів моделі (ваг) традиційно застосовуються градієнтні методи. Аналітичне знаходження частинних похідних для складних цільових функцій вручну є процесом, схильним до помилок. СКМ забезпечують точне аналітичне (символьне) диференціювання, що є критично важливим на етапі проектування нових функцій втрат або специфічних регуляризаторів.

Нехай $L(w)$ — цільова функція втрат, де w — вектор параметрів. Завдання мінімізації полягає в знаходженні:

$$w^* = \arg \min L(w)$$

Класичний крок градієнтного спуску записується як:

$$w(t+1) = w(t) - \eta \nabla L(w(t))$$

де η — швидкість навчання (learning rate), а $\nabla L(w)$ — вектор градієнта. Використання СКМ дозволяє миттєво отримати точний аналітичний вираз для $\nabla L(w)$ та матриці Гессе $H(w) = \nabla^2 L(w)$, що є необхідним для реалізації методів другого порядку, які забезпечують квадратичну швидкість збіжності.

Різні математичні пакети мають свої унікальні переваги при дослідженні ML-моделей[1]. Вибір конкретного інструменту залежить від того, який аспект алгоритму досліджується: аналітичні

властивості чи чисельна стійкість на великих масивах даних.

Система комп'ютерної математики Wolfram Mathematica основною перевагою в ML є найпотужніший апарат символічних перетворень та інтеграція з Wolfram|Alpha, найкраще підходить для теоретичне дослідження збіжності, пошук аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь втрач[1].

Система комп'ютерної математики MATLAB (з Deep Learning Toolbox) основною перевагою в ML є високооптимізовані матричні обчислення, інструменти візуалізації та імітаційного моделювання, найкраще підходять для сфери застосування прототипування інженерних систем, аналіз сигналів, цифрова обробка зображень в контурах керування.

Система комп'ютерної математики Python (SymPy / NumPy / SciPy) основною перевагою в ML є безкоштовна екосистема з безпосереднім виходом на виробничі ML-фреймворки (PyTorch, TensorFlow), найкраще підходять для сфери застосування прототипування інженерних систем, аналіз сигналів, цифрова обробка зображень в контурах керування.

Однією з найважливіших математичних проблем у машинному навчанні є проблема затухання або вибуху градієнтів [2] (vanishing/exploding gradients) у глибоких нейронних мережах. За допомогою СКМ дослідники мають можливість аналізувати спектральний радіус матриць ваг та власні значення матриці Гессе вздовж траєкторії оптимізації. Аналітичний аналіз власних значень лі дозволяє чітко визначити умови, за яких алгоритм залишається стійким:

$$|1 - \eta\lambda_{\max}| < 1$$

Цей критерій, виведений та промодельований у СКМ, дає змогу адаптивно підбирати крок навчання без необхідності проведення тисяч вартісних експериментів на реальних обчислювальних кластерах, що значно економить часові та апаратні ресурси під час наукових досліджень.

Висновки

Системи комп'ютерної математики є невід'ємним інструментом сучасного дослідника в галузі Machine Learning. Вони забезпечують місток між абстрактною математичною теорією та програмною реалізацією алгоритмів. Інтеграція СКМ у науковий процес дозволяє суттєво прискорити етап перевірки теоретичних гіпотез, оптимізувати математичний апарат моделей та підвищити якість підготовки майбутніх фахівців з аналізу даних, роблячи їх конкурентоспроможними на сучасному ринку праці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Глушко, Н. В. (2024). Інноваційні методи викладання вищої математики у ЗВО: комп'ютерно-орієнтований підхід. Київ: Наукова думка.
2. Wolfram, S. (2020). Elements of Machine Learning in Mathematica. Wolfram Media.
3. Bishop, C. M. (2006). Pattern Recognition and Machine Learning. Springer.

Лавров Андрій Юрійович — науковий співробітник, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, e-mail: andriy.lavrov@gmail.com

Лавров Олег Юрійович — к.т.н., доц., Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків

Lavrov Andriy Yurievich — Researcher, Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, e-mail: andriy.lavrov@gmail.com

Lavrov Oleg Yurievich — Ph.D., Associate Professor, Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv