

# ВІДНОШЕННЯ СПРЯЖЕНОСТІ В ІНВЕРСНОМУ МОНОЇДІ ЛОКАЛЬНИХ АВТОМОРФІЗМІВ МІЖ ІНТЕРВАЛАМИ ВПОРЯДКОВАНОЇ МНОЖИНИ $\mathbb{N}$

Вінницький національний технічний університет

## Анотація

Ми знаходимо необхідні і достатні умови спряженості двох елементів інверсного моноїда локальних автоморфізмів між інтервалами натуральних чисел.

**Ключові слова:** інверсна напівгрупа; відношення спряженості.

## Abstract

We find necessary and sufficient conditions for two elements of the inverse monoid of local automorphisms between intervals of natural numbers to be conjugate.

**Keywords:** inverse semigroup; conjugacy relation

Одним з основних бінарних відношень, що визначаються на групі  $G$ , є відношення спряженості. Кажуть, що елементи  $a, b \in G$  спряжені, якщо існує елемент  $x \in G$  такий, що  $a = b x x^{-1}$ . Відношення спряженості між елементами  $a, b \in G$  позначають через  $a \square b$ . Оскільки в довільній напівгрупі не існує коректного означення елемента, оберненого до  $x$ , то автоматично перенести поняття спряженості на довільну напівгрупу – неможливо. Втім можна визначити відношення спряженості на групі, не використовуючи  $x^{-1}$ . А саме: елементи  $a, b \in G$  спряжені тоді і лише тоді, коли знайдуться елементи  $u, v \in G$  такі, що  $a = u \cdot v$  і  $b = v \cdot u$ . Легко показати, що для групи наведені два означення є еквівалентними. Друге означення безперешкодно можна застосувати для довільної напівгрупи. Взагалі будемо вважати, що бінарне відношення на напівгрупі є відношенням спряженості, якщо його застосування для групи дає класичне означення групової спряженості. Найзагальніше означення спряженості (позначається через  $\square_n$ ) на довільній напівгрупі було дано в статті [1]. Відтворимо його: нехай  $S$  – довільна напівгрупа і  $S^1$  – напівгрупа, яку ми одержуємо з  $S$ , зовні приєднавши до неї одиницю 1. Тоді:

$$a \square_n b \Leftrightarrow \exists_{g, h \in S^1} (ag = gb, bh = ha, hag = b, gbh = a).$$

Далі, напівгрупу  $S$  називають інверсною, якщо для будь-якого елемента  $a \in S$  існує єдиний елемент  $a^{-1} \in S$  такий що  $aa^{-1}a = a$  і  $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ . Конкретизуючи загальне означення спряженості для інверсної напівгрупи  $S$  одержуємо (див. [2]):

$$a \square b \Leftrightarrow \exists_{g \in S^1} (g^{-1}ag = b, bgg^{-1} = a).$$

Застосуємо щойно наведене означення спряженості для інверсної напівгрупи  $In$ , яку ми визначимо наступним чином: розглянемо сукупність всіх інтервалів на множині натуральних чисел  $\mathbb{N}$  (тут маються на увазі інтервали вигляду  $[a; \infty)$  і вигляду  $[a; b]$ ). Елементами напівгрупи  $In$  є взаємно однозначні монотонні функції, для кожної з яких область визначення і множина значень є інтервалом. Наприклад,  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in In$  і  $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & n-2 & \dots \end{pmatrix} \in In$ . Якщо  $\xi \in In$ , то область визначення і множину значень функції  $\xi$  позначимо відповідно через  $dom(\xi)$  і  $im(\xi)$ . Зазначимо простий факт: якщо  $\xi, \eta \in In$ ,  $dom(\xi) = dom(\eta)$  і  $im(\xi) = im(\eta)$ , то  $\xi = \eta$ .

Наступні дві теореми характеризують відношення спряженості на інверсній напівгрупі  $In$ .

**Теорема 1.** Нехай  $\xi, \eta \in In$ , до того ж  $\eta: [a; \infty) \rightarrow [b; \infty)$  і  $\xi: [c; \infty) \rightarrow [d; \infty)$ . Тоді має місце еквіваленція  $\eta \square \xi \Leftrightarrow a - b = c - d$ .

Доведення. 1) Припустимо, що для деякого  $g \in In$  мають місце рівності:

$$g^{-1} \circ \eta \circ g = \xi \text{ і } g \circ \xi \circ g^{-1} = \eta.$$

Оскільки  $(a; b) \in \eta$ , то  $(a; b) \in g \circ \xi \circ g^{-1}$ . Звідси випливає, що існують натуральні числа  $z$  і  $u$  такі, що  $(a; z) \in g$ ,  $(z; u) \in \xi$ ,  $(u; b) \in g^{-1}$ . Позаяк  $(u; b) \in g^{-1}$ , то  $(b; u) \in g$ . До того ж  $(a; z) \in g$ . Звідси маємо рівність  $z - a = u - b$ , з якої одержуємо:  $z - u = a - b$ . Оскільки  $(z; u) \in \xi$ , то  $z - u = c - d$ . Отже,  $a - b = c - d$ .

2) Припустимо тепер, що має місце рівність  $a - b = c - d$ . Нам треба довести, що існує елемент  $g \in In$  такий, що  $g^{-1} \circ \eta \circ g = \xi$  і  $g \circ \xi \circ g^{-1} = \eta$ . Нехай  $g: [a; \infty) \rightarrow [c; \infty)$ . Тоді  $g^{-1}: [c; \infty) \rightarrow [a; \infty)$ . Розглянемо випадок, коли  $b \geq a$ . Оскільки  $a - b = c - d$ , то  $b - a = d - c \geq 0$ . Тобто  $d \geq c$ , а, отже,  $d \in \text{dom}(g^{-1})$ . Розглянемо  $g \circ \xi \circ g^{-1}$ . Маємо:

$$(a)g = c, (c)\xi = d, (d)g^{-1} = d + a - c = \{d = c + b - a\} = c + b - a + a - c = b.$$

Отже,  $\text{dom}(g \circ \xi \circ g^{-1}) = \text{dom}(\eta)$ . Оскільки  $(a)g = b \in \text{im}(g \circ \xi \circ g^{-1})$ , враховуючи рівність  $\text{dom}(g \circ \xi \circ g^{-1}) = \text{dom}(\eta) = [a; \infty)$  і взаємно однозначність всіх перетворень напівгрупи  $In$ , одержуємо рівність  $\text{im}(g \circ \xi \circ g^{-1}) = \text{im}(\eta)$ . Позаяк  $\text{dom}(g \circ \xi \circ g^{-1}) = \text{dom}(\eta)$  і  $\text{im}(g \circ \xi \circ g^{-1}) = \text{im}(\eta)$ , то  $g \circ \xi \circ g^{-1} = \eta$ . Аналогічно можна довести рівність  $g^{-1} \circ \eta \circ g = \xi$ . Зауважимо також, що доведення залишається таким самим за умови, що  $b \leq a$ .

**Теорема 2.** Нехай  $\xi, \eta \in In$ , до того ж  $\eta: [a; b] \rightarrow [c; d]$  і  $\xi: [x; y] \rightarrow [u; v]$ . Тоді має місце еквіваленція  $\eta \square \xi \Leftrightarrow a - c = x - u$  і  $\text{rank}(\eta) = \text{rank}(\xi)$ .

Доведення. 1) Припустимо, що для деякого  $g \in In$  мають місце рівності:

$$g^{-1} \circ \eta \circ g = \xi \text{ і } g \circ \xi \circ g^{-1} = \eta.$$

Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що  $a - c = x - u$ . Оскільки

$$\text{rank}(\eta) = \text{rank}(g \circ \xi \circ g^{-1}) \leq \text{rank}(\xi \circ g^{-1}) \leq \text{rank}(\xi) \text{ і}$$

$$\text{rank}(\xi) = \text{rank}(g^{-1} \circ \eta \circ g) \leq \text{rank}(\eta \circ g) \leq \text{rank}(\eta),$$

то  $\text{rank}(\eta) = \text{rank}(\xi)$ .

2) Нехай тепер виконуються рівності:  $a - c = x - u$  і  $\text{rank}(\eta) = \text{rank}(\xi)$ . Аналогічно, як і при доведенні другої частини теореми 1, ми можемо переконатися, що для перетворення  $\varphi: [a; b] \rightarrow [x; y]$  мають місце рівності:  $\varphi^{-1} \circ \eta \circ \varphi = \xi$  і  $\varphi \circ \xi \circ \varphi^{-1} = \eta$ .

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. J. Konieczny, A new definition of conjugacy for semigroups, J. Algebra and Appl. 17 (2018), 20 pp,
2. J. Araújo, M. Kinyon, J. Konieczny, Conjugacy in inverse semigroups, Journal of Algebra 533 (2019) 142–173 pp.

*Дереч Володимир Дмитрович*, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету, Вінниця, [derech@vntu.edu.ua](mailto:derech@vntu.edu.ua)

*Derech Volodymyr Dmytrovych*, PhD in Mathematics, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, [derech@vntu.edu.ua](mailto:derech@vntu.edu.ua)