

КОМП'ЮТЕРНА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПАРАДОКСІВ: ДИНАМІКА ЗБІЖНОСТІ ІНТЕГРАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСКІНЧЕННИХ ТІЛ

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Анотація

У тезах розглянуто методичні аспекти обчислення об'єму та площі поверхні нескінченних тіл обертання — об'єктів, чий аналіз традиційно провокує появу математичних парадоксів та контрінтуїтивних результатів. Обґрунтовано трансформацію дидактичної парадигми: від традиційного монооб'єктного вивчення ізольованих класичних прикладів та виконання абстрактних обчислювальних алгоритмів до впровадження трирівневого ієрархічного комплексу задач, що стимулює самостійну дослідницьку діяльність студентів. На прикладі тіла, утвореного обертанням цисоїди Діокла навколо її асимптоти, показано скінченність обох його інтегральних характеристик (як об'єму, так і площі поверхні). Завдяки комп'ютерному моделюванню в середовищі DESMOS наочно проілюстровано зв'язок між аналітичною структурою підінтегральних функцій та динамікою обчислювальних процесів в околі сингулярності.

Ключові слова: математичні парадокси, тіла обертання, невласні інтеграли, цисоїда Діокла, комп'ютерне моделювання, DESMOS.

Abstract

The abstract examines the pedagogical aspects of calculating the volume and surface area of infinite solids of revolution — objects whose analysis traditionally provokes mathematical paradoxes and counterintuitive results. It substantiates a transformation of the educational paradigm: shifting from the traditional mono-object study of isolated classical examples and the execution of abstract computational algorithms toward the implementation of a three-level hierarchical framework of problems designed to stimulate students' independent research activity. Using the solid formed by the revolution of the cissoid of Diocles around its asymptote as an example, the finiteness of both its integral characteristics (both volume and surface area) is demonstrated. Through computer modeling in the DESMOS environment, the relationship between the analytical structure of the integrands and the dynamics of computational processes in the vicinity of the singularity is clearly illustrated.

Keywords: mathematical paradoxes, solids of revolution, improper integrals, cissoid of Diocles, computer modeling, DESMOS.

Вступ

Для формування у студентів цілісного уявлення про інтегральні характеристики нескінченних тіл обертання доцільно застосувати ієрархічний підхід до добору об'єктів дослідження [1]. Методична стратегія полягає в аудиторній демонстрації результатів, що базується на аналізі класичних парадоксів, та винесенні складних аналітичних розрахунків і комп'ютерного моделювання в площину самостійної роботи або математичного гуртка.

Повна стаття, що готується за результатами дослідження, передбачає розгляд трирівневого дослідницького комплексу задач: від класичного базового рівня (Ріг Габрієля, псевдосфера Белтрамі) та просунутих моделей (цисоїда Діокла, конхноїда Слюза) до задач підвищеної складності, пов'язаних з обертанням навколо похилої асимптоти (декартів лист). У межах цих тез акцентовано увагу на задачі обертання цисоїди Діокла [2], аналітичні розрахунки та комп'ютерна візуалізація якої в середовищі DESMOS дозволяють наочно продемонструвати динаміку збіжності інтегральних характеристик нескінченних тіл.

Результати дослідження

У межах теми «Об'єм та площа поверхні тіл обертання» використання невласних інтегралів традиційно обмежується класичним прикладом «Рога Габрієля» (гіперболічної лійки), який демонструє ефект збіжності об'єму при розбіжності площі поверхні [3–4]. Обмеженість аудиторного часу часто унеможливорює розгляд ширшого спектра нескінченних тіл, що залишає поза увагою студентів прик-

лади, де обидві інтегральні характеристики є скінченними. Дослідження цисоїди Діюкла при обертанні навколо її вертикальної асимптоти дозволяє усунути цей методичний недолік, демонструючи альтернативний тип поведінки нескінченних геометричних об'єктів.

Канонічне рівняння цисоїди Діюкла в декартовій системі координат має вигляд:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}, \quad x \in [0, 2a).$$

Крива є симетричною відносно осі Ox і має вертикальну асимптоту $x = 2a$.

Аналітичне обчислення об'єму за допомогою методу циліндричних оболонок. Традиційний підхід до обчислення об'єму тіла обертання із паралельним переносом осі обертання до осі Oy призводить до громіздких алгебраїчних виразів, які знижують мотивацію студентів. Замість цього методично виправдано застосувати метод циліндричних оболонок безпосередньо у початковій системі координат.

Для вертикального елемента інтегрування шириною dx , розташованого на відстані x від осі Oy , радіус обертання навколо асимптоти становить $R(x) = 2a - x$, а висота циліндричної оболонки визначається як

$$h(x) = 2y(x) = 2\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}.$$

Тоді диференціал об'єму дорівнює

$$dV = 2\pi \cdot R(x) \cdot h(x) dx,$$

а повний об'єм тіла обертання задається невластним інтегралом першого роду:

$$V = 2\pi \int_0^{2a} (2a-x) \cdot 2\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}} dx.$$

Завдяки тотожному перетворенню, ірраціональність у знаменнику підінтегрального виразу повністю скорочується, що демонструє аналітичну елегантність обраного методу і стає першим мотивувальним фактором для студентів:

$$V = 4\pi \int_0^{2a} x^{3/2} \sqrt{2a-x} dx. \quad (1)$$

Отриманий інтеграл є класичним прикладом інтегрування диференціального бінома:

$$x^m (b + cx^n)^p dx,$$

де $m = 3/2$, $n = 1$, $p = 1/2$, $b = 2a$, $c = -1$.

Має місце виконання третьої умови інтегрованості бінома:

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{\frac{3}{2}+1}{1} + \frac{1}{2} = 3,$$

і застосування підстановки:

$$2ax^{-1} - 1 = z^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2a}{z^2 + 1}. \quad (2)$$

На цьому етапі доцільно запропонувати студентам порівняти виконану підстановку з геометричною параметризацією цисоїди Діюкла, яка виконується через пучок прямих $y = tx$ і має вигляд:

$$x(t) = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{2at^3}{1+t^2}. \quad (3)$$

Співвідношення $z = 1/t$ демонструє студентам глибоку конвергенцію між аналітичним апаратом інтегрального числення та конструктивною геометрією, перетворюючи абстрактні формули на логічну систему.

Слід зазначити, що згаданий інтеграл можна обчислити як за допомогою підстановки (2), так і через тригонометричну заміну $x = 2a \sin^2 t$, що становить додаткову методичну перевагу розглянутого прикладу. В обох випадках інтегрування приводить до скінченного значення об'єму тіла обертання:

$$V = 2\pi^2 a^3. \quad (4)$$

Аналітичне обчислення площі поверхні тіла обертання. Обчислення площі поверхні обертання S вимагає знаходження диференціала дуги кривої $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$. Після диференціювання функції $y = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2a-x}}$ та алгебраїчних спрощень одержуємо:

$$ds = \frac{a\sqrt{8a-3x}}{(2a-x)^{3/2}} dx.$$

Зважаючи на симетрію обох гілок цисоїди Діокла відносно осі абсцис, повна площа поверхні обертання навколо вертикальної асимптоти $x = 2a$ розраховується як подвоєний інтеграл від добутку довжини кола радіуса $R(x) = 2a - x$ на елемент дуги ds :

$$S = 4\pi \int_0^{2a} R(x) ds = 4\pi \int_0^{2a} (2a-x) \cdot \frac{a\sqrt{8a-3x}}{(2a-x)^{3/2}} dx = 4\pi a \int_0^{2a} \frac{\sqrt{8a-3x}}{\sqrt{2a-x}} dx. \quad (5)$$

З методичної точки зору, цей етап є надзвичайно цінним для формування дослідницьких компетентностей студентів, оскільки припускає застосування двох альтернативних способів обчислення отриманого інтеграла.

Спосіб 1. Степенева заміна змінної. Перший підхід полягає в використанні алгебраїчної заміни $2a - x = t^2$, яка усуває сингулярність у знаменнику. Проте під коренем у чисельнику утворюється нова квадратична ірраціональність вигляду $\sqrt{2a + 3t^2}$. Подальше інтегрування вимагає використання класичного (хоч і дещо громіздкого) інструментарію: інтегрування частинами або застосування тригонометричних або гіперболічних підстановок. Цей шлях корисний для закріплення базових навичок інтегрування трансцендентних форм.

Спосіб 2. Дробово-лінійна підстановка. Більш витонченим є другий підхід із застосування дробово-лінійної підстановки:

$$u^2 = \frac{8a-3x}{2a-x},$$

яка безпосередньо відповідає третій умові інтегрованості диференціального бінома. Цей метод виконує дію повної раціоналізації підінтегрального виразу: ірраціональність повністю ліквідується, а задача зводиться до інтегрування правильного раціонального дроби вигляду $\frac{u^2}{(u^2-3)^2}$. Такий підхід

наочно демонструє студентам силу цілеспрямованих алгебраїчних перетворень у математичному аналізі.

Незалежно від обраного способу отримуємо таке значення площі поверхні досліджуваного тіла обертання:

$$S = 8\pi a^2 \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \ln(2 + \sqrt{3}) \right). \quad (6)$$

Таким чином, отримані аналітичні результати показують, що обидві інтегральні характеристики досліджуваного тіла обертання цисоїди Діюкла – як об’єм, так і площа поверхні – є скінченними величинами. Це створює виразний методичний контраст із класичним парадоксом «Рога Габрієля», де скінченний об’єм поєднується з нескінченною площею поверхні. Таке порівняння дозволяє наочно продемонструвати студентам різні сценарії збіжності невластних інтегралів під час геометричного аналізу нескінченних просторових топологій.

Динамічне комп’ютерне моделювання збіжності інтегральних характеристик в середовищі DESMOS. Для інтерактивного супроводу навчального матеріалу та організації самостійної дослідницької роботи студентів авторами розроблено динамічну візуалізаційну модель у середовищі DESMOS (рис. 1).

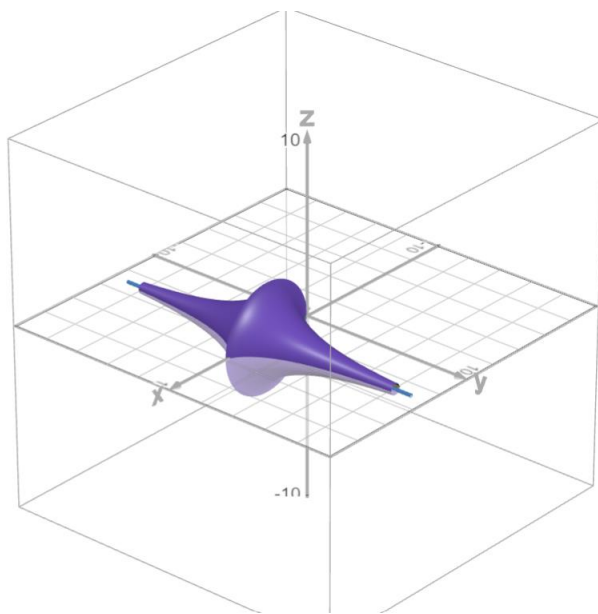


Рис. 1. Динамічна модель тіла обертання цисоїди Діюкла навколо її асимптоти в середовищі DESMOS.

В основі комп’ютерної реалізації лежить введення параметра L , який виступає штучно встановленою верхньою межею зміни параметра t параметричних рівняннях кривої (3). Це дозволяє замінити теоретичну верхню межу інтегрування $2a$ на поточне значення $x(L)$, реалізуючи ефект «штучного зрізання» нескінченного тіла обертання. Завдяки такому підходу обчислювальний алгоритм захищено від сингулярності, а студенти мають змогу проводити комп’ютерний експеримент, порівнюючи поточні значення інтегральних характеристик зрізаної моделі:

$$V_{Model}(x(L)) = 4\pi \int_0^{x(L)} x^{3/2} \sqrt{2a-x} dx,$$

$$S_{Model}(x(L)) = 4\pi a \int_0^{x(L)} \frac{\sqrt{8a-3x}}{\sqrt{2a-x}} dx,$$

з їхніми теоретичними граничними значеннями (формули (4) та (6)).

У ході комп’ютерного моделювання виявляється важливий факт: чисельне значення об’єму моделі збігається до свого теоретичного значення значно швидше, ніж площа її поверхні.

З методичної точки зору це дозволяє наочно продемонструвати студентам аналітичну природу підінтегральних виразів у невластних інтегралах:

- **обчислення об’єму за формулою (1):** підінтегральна функція в околі сингулярності ($x \rightarrow 2a$) прямує до нуля, що забезпечує швидке насичення інтегральної суми на початкових етапах інтегрування.
- **обчислення площі поверхні за формулою (5):** підінтегральна функція має інтегральну сингулярність другого роду (знаменник прямує до нуля, а сама функція – до нескінченності). Це доводить, що основна площа нескінченного тіла зосереджена саме в його приасимптотичній

області, тому для досягнення заданої точності потрібне значно більше наближення верхньої межі інтегрування до граничного значення $2a$.

Таким чином, використання DESMOS перетворює абстрактне обчислення інтегралів на живий аналіз швидкості збіжності, формуючи у майбутніх інженерів інтуїтивне розуміння поведінки сингулярних систем.

Висновки

Синергія класичного апарату інтегрального числення та сучасних інструментів інтерактивного цифрового моделювання у дослідженні нескінченних просторових топологій дозволяє підбити такі підсумки:

- **Трансформація дидактичної парадигми.** Перехід від монооб'єктного викладання (класичного аналізу «Рога Габріеля») до трирівневого ієрархічного комплексу задач дозволяє диференціювати навчання. Це переводить складні аналітичні розрахунки з категорії рутинних обчислень у площину самостійного наукового пошуку студентів, стимулюючи розвиток інженерно-дослідницького мислення.
- **Подолання концептуальних стереотипів.** Дослідження цисоїди Діокла забезпечує важливий когнітивний зсув у сприйнятті студентами геометрії нескінченності. На відміну від гіперболічної лійки, де скінченність об'єму супроводжується розбіжністю площі поверхні, аналітично доведена скінченність обох характеристик досліджуваного тіла розширює математичний кругозір та демонструє різноманітність сценаріїв збіжності невластних інтегралів.
- **Евристична роль комп'ютерного моделювання.** Інтеграція динамічного середовища DESMOS трансформує сприйняття математичних абстракцій. Введення параметра штучного зрізання L та перехід до динамічної межі інтегрування $x(L)$ дозволяє виявити фундаментальний ефект – суттєву різницю в швидкостях чисельної збіжності значень об'єму та площі поверхні через різну природу підінтегральних сингулярностей. Комп'ютерна візуалізація в такий спосіб перестає бути простою ілюстрацією, а стає автономним інструментом наукового аналізу, що наочно пов'язує аналітичну структуру функцій із динамікою обчислювальних процесів.

Реалізація такого синергетичного підходу не лише оптимізує процес засвоєння фундаментальних концептів математичного аналізу, а й кардинально змінює роль вищої математики в технічному університеті. Вона перестає сприйматися студентами як набір абстрактних алгоритмів, перетворюючись на живий інструмент критичного мислення та комп'ютерно-орієнтованого наукового пошуку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Hart K. Hierarchies in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*. 1981. Vol. 12. № 2. P. 205–218. *JSTOR*, <http://www.jstor.org/stable/3482365>.
2. van Maanen, J. From Quadrature to Integration: Thirteen Years in the Life of the Cissoid. *The Mathematical Gazette*. 1991. Vol. 75. № 471. P. 1–15. <https://doi.org/10.2307/3618976>
3. Wijeratne C., Zazkis R. On Painter's Paradox: Contextual and Mathematical Approaches to Infinity. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. 2015. Vol. 1. P. 163–186. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0004-z>
4. Тулученко Г.Я. Математичні парадокси та поняття нескінченності. Європейське майбутнє: філософсько-освітні студії: Збірник тез і доповідей (Частина 1). за ред. Г. Д. Берегової та ін. (9–10 травня 2024 р. м. Херсон-Хмельницький) – Херсон: вид-во ФОП Вишемирський В. С., 2024. – С. 134–135.

Сусло Валентин Антонович — здобувач вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю G3 – Електрична інженерія, освітньою програмою «Електропривод, мехатроніка та робототехніка», навчально науковий інститут енергетики, електроніки та електромеханіки, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, e-mail: Valentyn.Suslo@ieee.khpi.edu.ua

Тулученко Галина Яківна — д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», email: Halyna.Tuluchenko@khpi.edu.ua.

Suslo Valentyn A. — First-cycle (Bachelor's) student of the major G3 – Electrical Engineering, educational program "Electric Drive, Mechatronics and Robotics", Educational and Scientific Institute of Power Engineering, Electronics and Electromechanics, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, email: Valentyn.Suslo@ieee.khpi.edu.ua

Tuluchenko Halyna Ya. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of Higher Mathematics, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, email: Halyna.Tuluchenko@khpi.edu.ua.