

ВИКОРИСТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ІНФЕКЦІЙНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено застосування диференціальних рівнянь для математичного моделювання процесів поширення інфекційних захворювань. Розглянуто модель SIR, яка дозволяє описати динаміку зміни кількості сприйнятливих, інфікованих та вилікуваних осіб у популяції. Проаналізовано вплив параметрів моделі на швидкість поширення захворювання та тривалість епідемічного процесу.

Ключові слова: диференціальні рівняння, математичне моделювання, епідемія, модель SIR, інфекційні захворювання, популяція.

Abstract

The paper investigates the application of differential equations for mathematical modeling of infectious disease spread. The SIR model is considered, which describes the dynamics of susceptible, infected and recovered individuals in a population. The influence of model parameters on the rate of disease transmission and epidemic duration is analyzed.

Keywords: differential equations, mathematical modeling, epidemic, SIR model, infectious diseases, population.

Вступ

Математичне моделювання є одним із найважливіших методів дослідження складних процесів у природничих, технічних та соціальних науках. Завдяки використанню математичних моделей стає можливим аналіз явищ, прогнозування їхнього розвитку та оцінювання впливу різних факторів на перебіг досліджуваних процесів. Особливе місце серед математичних методів посідають диференціальні рівняння, які дозволяють описувати динаміку систем, параметри яких змінюються в часі.

Однією з актуальних сфер застосування диференціальних рівнянь є моделювання поширення інфекційних захворювань. Сучасний світ регулярно стикається зі спалахами епідемій та пандемій, які можуть суттєво впливати на здоров'я населення, економіку та соціальне життя суспільства. У зв'язку з цим особливої важливості набувають методи, що дають змогу прогнозувати швидкість поширення інфекції, оцінювати можливі наслідки захворювання та визначати ефективність профілактичних заходів [1, 2].

Для дослідження епідемічних процесів широко використовуються математичні моделі, засновані на системах диференціальних рівнянь. Однією з найвідоміших є модель SIR, яка поділяє населення на групи сприйнятливих до захворювання, інфікованих та осіб, що одужали. Такий підхід дозволяє простежити зміну чисельності кожної групи в часі та встановити закономірності розвитку епідемії залежно від параметрів моделі.

Дослідження математичних моделей поширення інфекційних захворювань сприяє глибшому розумінню механізмів епідемічних процесів і демонструє практичну цінність диференціальних рівнянь для розв'язання актуальних задач охорони здоров'я.

Результати дослідження

Для опису епідемічного процесу широко використовується модель SIR. У ній населення поділяється на три групи:

- $S(t)$ — сприйнятливі до захворювання особи;
- $I(t)$ — інфіковані особи;
- $R(t)$ — особи, які одужали та набули імунітету.

Загальна чисельність популяції визначається співвідношенням: $N = S(t) + I(t) + R(t)$ [3, 4].

Математична модель описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I,\end{aligned}$$

де β — коефіцієнт передачі інфекції, а γ — коефіцієнт одужання.

Для демонстрації роботи моделі було розглянуто умовну популяцію чисельністю 1000 осіб. Початково інфікованими є 10 осіб, сприйнятливими — 990 осіб, а кількість осіб з імунітетом дорівнює нулю. Для моделювання використано параметри $\beta = 0,3$ та $\gamma = 0,1$.

Результати чисельного експерименту показали, що на початковому етапі кількість інфікованих швидко зростає, досягаючи максимального значення приблизно через 30–40 днів. Після цього кількість хворих поступово зменшується внаслідок збільшення частки осіб, які одужали та набули імунітету. Наприкінці моделювання більша частина популяції переходить до групи $R(t)$.

Графічну ілюстрацію динаміки поширення інфекції за моделлю SIR наведено на рис. 1.

Зміна кількості сприйнятливих, інфікованих та одужалих осіб у популяції з 1000 осіб.

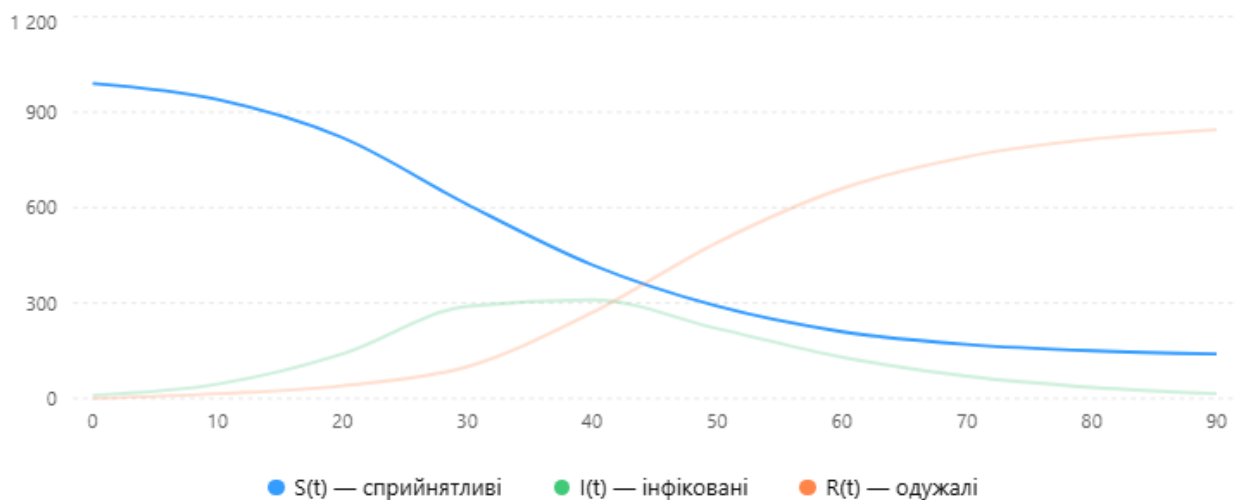


Рис. 1 Динаміка зміни чисельності сприйнятливих $S(t)$, інфікованих $I(t)$ та одужалих $R(t)$ осіб за моделлю SIR при параметрах $\beta=0,3$ та $\gamma=0,1$.

Як видно з графіка, на початковому етапі кількість інфікованих осіб зростає внаслідок активного поширення інфекції серед сприйнятливого населення. Максимальне значення функції $I(t)$ досягається приблизно на 40-й день моделювання. Надалі кількість інфікованих зменшується через збільшення чисельності осіб, які одужали та набули імунітету. Одночасно функція $S(t)$ монотонно спадає, а функція $R(t)$ монотонно зростає, що відповідає типовому перебігу епідемічного процесу в рамках моделі SIR.

Система показує, що кількість сприйнятливих осіб зменшується внаслідок зараження, кількість інфікованих спочатку зростає, а потім зменшується через одужання. Одночасно збільшується кількість осіб, які набули імунітету.

Аналіз моделі демонструє, що перебіг епідемії значною мірою залежить від співвідношення параметрів β та γ . Якщо швидкість зараження перевищує швидкість одужання, кількість інфікованих стрімко зростає. У протилежному випадку поширення захворювання поступово згасає.

Моделі такого типу застосовуються для прогнозування сезонних захворювань, оцінювання наслідків пандемій та планування профілактичних заходів у сфері охорони здоров'я.

Висновки

У роботі досліджено можливості використання диференціальних рівнянь для математичного моделювання поширення інфекційних захворювань. Розглянуто класичну модель SIR, яка описує взаємозв'язок між трьома основними групами населення: сприйнятливими до захворювання особами, інфікованими та тими, хто одужав і набув імунітету.

Проведений аналіз показав, що система диференціальних рівнянь дозволяє адекватно відображати основні закономірності перебігу епідемічного процесу. Встановлено, що динаміка поширення захворювання значною мірою визначається значеннями коефіцієнтів передачі інфекції та одужання. Зростання інтенсивності передачі інфекції призводить до швидшого поширення захворювання та збільшення кількості інфікованих осіб, тоді як підвищення швидкості одужання сприяє згасанню епідемії.

Отримані результати підтверджують ефективність математичного моделювання як інструменту прогнозування розвитку епідемій та оцінювання можливих сценаріїв їх перебігу. Моделі типу SIR можуть використовуватися для аналізу сезонних інфекційних захворювань, оцінювання наслідків пандемій, планування профілактичних заходів і підтримки прийняття рішень у сфері громадського здоров'я.

Таким чином, диференціальні рівняння є потужним математичним апаратом для дослідження епідемічних процесів, а їх застосування сприяє підвищенню точності прогнозів та ефективності заходів щодо контролю поширення інфекційних захворювань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Самойленко А. М., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння. – Київ : Либідь, 2003. – 600 с.
2. Бойчук О. А., Гришук В. І. Математичне моделювання динамічних систем. – Львів : Вид-во ЛНУ, 2018. – 312 с.
3. Murray J. D. Mathematical Biology. – New York : Springer, 2002. – 576 p.
4. Newman M. Networks: An Introduction. – Oxford University Press, 2018. – 784 p.

Кулик Маргарита Олександрівна, студентка першого курсу, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, marharytakulyk@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна, к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Kulyk Marharyta O., first-year student, Faculty of Electric Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: marharytakulyk@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com