

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ЯК ІНСТРУМЕНТ АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ У КОЛАХ ЗМІННОГО СТРУМУ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено роль комплексних чисел як одного з ключових математичних інструментів аналізу процесів у колах змінного струму. Розглянуто математичні основи комплексного подання гармонічних величин, поняття імпедансу, фазового зсуву та комплексної потужності. Особливу увагу приділено практичному використанню комплексного методу під час розрахунку електричних кіл з активними, індуктивними та ємнісними елементами. Показано, що застосування комплексних чисел дозволяє значно спростити математичні розрахунки та підвищити ефективність інженерного аналізу.

Ключові слова: комплексні числа, змінний струм, імпеданс, фазор, комплексна потужність, електротехніка.

Abstract

The paper explores the role of complex numbers as one of the key mathematical tools for analyzing processes in AC circuits. The mathematical foundations of the complex representation of harmonic quantities, the concepts of impedance, phase shift, and complex power are considered. Particular attention is paid to the practical use of the complex method in calculating electrical circuits with active, inductive, and capacitive elements. It is shown that the use of complex numbers allows significantly simplifying mathematical calculations and increasing the efficiency of engineering analysis.

Keywords: complex numbers, alternating current, impedance, phasor, complex power.

Вступ

Дослідження процесів у колах змінного струму є одним із важливих напрямів сучасної електротехніки та енергетики. Особливістю таких кіл є гармонічний характер зміни електричних величин у часі, що ускладнює їх математичний опис і потребує використання спеціальних методів аналізу. Традиційне представлення напруги та струму за допомогою тригонометричних функцій часто призводить до громіздких обчислень, особливо під час дослідження складних електротехнічних систем.

Ефективним засобом розв'язання зазначених задач є використання комплексних чисел, які дають змогу подати гармонічні сигнали у компактній формі та перейти від диференціальних рівнянь до алгебраїчних співвідношень. Комплексний метод забезпечує зручний опис амплітудно-фазових характеристик електричних величин, дозволяє визначати параметри електричних кіл, аналізувати режими їх роботи та оцінювати енергетичні показники [1-4].

У сучасній практиці комплексні числа широко застосовуються під час розрахунку електричних мереж, електронних пристроїв, систем автоматичного керування та програмних комплексів для комп'ютерного моделювання. Тому дослідження можливостей комплексного подання електричних величин і його ролі в аналізі кіл змінного струму є важливим як з теоретичної, так і з практичної точки зору.

Результати дослідження

Математично комплексне число записується у вигляді

$$z = a + jb,$$

де a – дійсна частина, b – уявна частина, а $j^2 = -1$. У теорії змінного струму гармонічні сигнали представляють комплексними амплітудами або фазорами. Такий підхід дозволяє враховувати не лише амплітуду сигналу, а й його фазу.

Для основних елементів електричного кола комплексний опір визначається такими співвідношеннями :

$$\begin{aligned}Z_R &= R; \\Z_L &= j\omega L; \\Z_C &= \frac{1}{j\omega C}.\end{aligned}$$

Загальний комплексний опір кола називається імпедансом. Саме імпеданс дозволяє використовувати закони Ома та Кірхгофа в комплексній формі [5-7].

Для послідовного кола RLC імпеданс визначається як

$$Z = R + j(X_L - X_C).$$

Знаючи значення імпедансу, можна легко знайти струм, напругу та фазовий зсув між ними. Це значно спрощує інженерні розрахунки порівняно з традиційними методами.

Однією з найважливіших переваг комплексного подання є можливість аналізу фазових співвідношень. У колі з індуктивністю струм відстає від напруги, а в колі з ємністю випереджає її. Саме фазові зсуви визначають характер передачі енергії та впливають на ефективність роботи електроустановок.

Для аналізу енергетичних процесів використовується поняття комплексної потужності, яка визначається виразом

$$S = P + jQ.$$

де P – активна потужність, а Q – реактивна. Активна потужність перетворюється на корисну роботу або тепло, тоді як реактивна потужність характеризує обмін енергією між джерелом та реактивними елементами кола.

Модуль комплексної потужності визначає повну потужність електричної системи. Аналіз цих величин дозволяє оцінювати енергоефективність обладнання та визначати необхідність компенсації реактивної потужності.

Для кращого розуміння практичного застосування комплексних чисел розглянемо послідовне коло, що складається з резистора, котушки індуктивності та конденсатора. Нехай параметри кола становлять: $R = 20 \text{ Ом}$, $X_L = 30 \text{ Ом}$, $X_C = 10 \text{ Ом}$. Тоді комплексний імпеданс кола дорівнює:

$$Z = R + j(X_L - X_C) = 20 + j20.$$

Модуль імпедансу визначається за формулою

$$|Z|^2 = (20^2 + 20^2) \approx 28,3 \text{ Ом}.$$

Якщо до кола прикладена напруга з діючим значенням $U = 220 \text{ В}$, то сила струму становитиме $I = U/|Z| \approx 220/28,3 \approx 7,77 \text{ А}$. Фазовий кут між напругою та струмом можна знайти за співвідношенням

$$\varphi = \arctg((X_L - X_C)/R) = \arctg(20/20) = 45^\circ.$$

Отриманий результат свідчить про те, що коло має індуктивний характер, а струм відстає від напруги на 45° . Використання комплексного подання дозволяє отримати всі основні характеристики кола за допомогою простих алгебраїчних операцій без необхідності розв'язування диференціальних рівнянь. Важливим аспектом аналізу є також визначення потужності. Для наведеного прикладу активна потужність дорівнює

$$P = UI \cos\varphi \approx 220 \cdot 7,77 \cdot 0,707 \approx 1209 \text{ Вт},$$

а реактивна потужність $Q = UI \sin\varphi \approx 1209 \text{ вар}$.

Наявність реактивної складової потужності свідчить про періодичний обмін енергією між джерелом живлення та реактивними елементами кола. Аналіз таких характеристик є необхідним під час проектування електротехнічних систем і підвищення їх енергоефективності.

Комплексні числа широко використовуються в електроенергетиці для розрахунку режимів роботи електричних мереж та систем електропостачання. Вони застосовуються під час моделювання ліній електропередач, трансформаторів та синхронних генераторів. В електроніці комплексний метод використовується для аналізу резонансних контурів, підсилювачів, фільтрів низьких і високих частот. У теорії автоматичного керування комплексні числа лежать в основі частотного аналізу та синтезу систем регулювання. Завдяки розвитку комп'ютерного моделювання комплексний аналіз став невід'ємною частиною сучасних програмних пакетів для проектування електротехнічних систем.

Головною перевагою комплексного методу є значне спрощення математичних розрахунків. Замість розв'язування складних диференціальних рівнянь інженер працює з алгебраїчними операціями над комплексними числами. Крім того, метод забезпечує наочність представлення фазових співвідношень. До обмежень належить те, що класичний комплексний підхід найбільш ефективний для усталених гармонічних режимів. Для аналізу перехідних процесів використовуються додаткові математичні методи.

Висновки

У результаті проведеного дослідження встановлено, що комплексні числа є фундаментальним математичним інструментом аналізу процесів у колах змінного струму. Їх використання дозволяє суттєво спростити математичний опис електротехнічних систем шляхом переходу від часових залежностей до комплексних амплітуд, що значно полегшує виконання інженерних розрахунків.

Показано, що комплексний метод забезпечує ефективне визначення імпедансу електричних кіл, аналіз фазових співвідношень між струмом і напругою, а також дослідження процесів передачі та перетворення енергії. Використання комплексного подання дає можливість застосовувати закони Ома та Кірхгофа в узагальненій формі, що особливо важливо під час розрахунку кіл, які містять активні, індуктивні та ємнісні елементи.

Встановлено, що комплексна форма запису потужності дозволяє одночасно враховувати активну та реактивну складові енергетичних процесів, що є необхідним для оцінювання ефективності роботи електроустановок і вибору засобів компенсації реактивної потужності. Також з'ясовано, що комплексний аналіз лежить в основі моделювання та проектування сучасних систем електропостачання, електронних пристроїв і систем автоматичного керування.

Отже, застосування комплексних чисел не лише спрощує розрахунки, а й розширює можливості дослідження електротехнічних процесів, забезпечуючи високу точність аналізу та ефективність розв'язання практичних інженерних задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бессонов Л. А. Теоретичні основи електротехніки. – Київ : Вища школа, 2018.
2. Бойко В. С. Теоретичні основи електротехніки : навч. посіб. – Вінниця : ВНТУ, 2021.
3. Федоренко Г. М. Електричні кола змінного струму. – Харків : ХНУРЕ, 2020.
4. Alexander C., Sadiku M. Fundamentals of Electric Circuits. – McGraw-Hill, 2021.
5. Dorf R., Svoboda J. Introduction to Electric Circuits. – Wiley, 2019.
6. Hayt W., Kemmerly J. Engineering Circuit Analysis. – McGraw-Hill, 2020.
7. Nilsson J., Riedel S. Electric Circuits. – Pearson, 2022.

Заїка Анна Андріївна, студентка першого курсу, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, annazaika441@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна, к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Zaika Anna A., first-year student, Faculty of Electric Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: annaizaika441@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com