

## ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У СУЧАСНИХ ОНЛАЙН- КАЛЬКУЛЯТОРАХ

Вінницький національний технічний університет

### Анотація

*У роботі проведено аналіз сучасних онлайн-калькуляторів для розв'язування диференціальних рівнянь. Досліджено особливості використання аналітичних та чисельних методів розв'язування, порівняно точність отриманих результатів та функціональні можливості популярних веб-сервісів. Розглянуто застосування методів Ейлера, Рунге–Кутти та символічних алгоритмів комп'ютерної алгебри.*

**Ключові слова:** диференціальне рівняння, онлайн-калькулятор, чисельні методи, метод Ейлера, метод Рунге-Кутти, комп'ютерна алгебра.

### Abstract

*The paper analyzes modern online calculators for solving differential equations. The features of analytical and numerical solution methods are investigated, and the accuracy and functionality of popular web services are compared. The application of Euler's method, Runge-Kutta methods, and symbolic algebra algorithms is considered.*

**Keywords:** differential equation, online calculator, numerical methods, Euler method, Runge-Kutta method, computer algebra.

### Вступ

Диференціальні рівняння є одним із фундаментальних розділів сучасної математики та важливим інструментом математичного моделювання. Вони широко застосовуються для опису процесів, у яких швидкість зміни певної величини залежить від її поточного стану або інших параметрів. За допомогою диференціальних рівнянь досліджують механічні коливання, теплові процеси, електричні кола, рух рідин і газів, динаміку популяцій, економічні процеси та багато інших явищ природничого й технічного характеру. Розв'язування диференціальних рівнянь є важливим етапом математичного аналізу моделей реальних процесів. Проте для багатьох практичних задач отримання аналітичного розв'язку пов'язане зі значними обчислювальними труднощами або взагалі є неможливим. У таких випадках застосовуються чисельні методи, які дозволяють знаходити наближені значення шуканих функцій із заданою точністю. Серед найбільш поширених чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь є метод Ейлера та методи Рунге–Кутти різних порядків. Стрімкий розвиток інформаційних технологій сприяв створенню великої кількості програмних засобів для автоматизації математичних обчислень. Особливе місце серед них займають онлайн-калькулятори, які забезпечують доступ до потужних обчислювальних алгоритмів без необхідності встановлення спеціалізованого програмного забезпечення. Такі веб-сервіси дозволяють виконувати символічні перетворення, знаходити аналітичні та чисельні розв'язки, будувати графіки функцій і досліджувати поведінку розв'язків у різних умовах [1, 2].

Популярність онлайн-калькуляторів у навчальному процесі постійно зростає, оскільки вони дають змогу оперативно перевіряти результати обчислень, аналізувати різні способи розв'язування задач та візуалізувати отримані результати. Водночас різні сервіси використовують відмінні алгоритми обчислень і мають неоднакові функціональні можливості, що зумовлює необхідність їх порівняльного аналізу.

## Результати дослідження

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$dy/dx=f(x,y) \quad (1)$$

Для його розв'язування онлайн-калькулятори застосовують два основні підходи: символні методи та чисельні методи [3,4].

Сервіси на основі систем комп'ютерної алгебри виконують аналітичні перетворення та знаходять точний розв'язок рівняння. Для диференціального рівняння  $dy/dx=x+y$  загальний розв'язок має вигляд  $y=Ce^x-x-1$ . Графік розв'язку показано на рис. 1.

Такі алгоритми використовуються в калькуляторах Symbolab та Wolfram Alpha.

Якщо аналітичний розв'язок знайти складно або неможливо, використовуються чисельні методи. Найпростішим є метод Ейлера:

$$Y_{n+1}=Y_n+h*f(X_n,Y_n)$$

де  $h$  — крок інтегрування.

Для підвищення точності сучасні калькулятори використовують методи Рунге–Кутти четвертого порядку, похибка яких значно менша порівняно з методом Ейлера.

Для оцінювання точності чисельних методів було проведено порівняння наближених результатів із точним аналітичним розв'язком. Встановлено, що при однаковому кроці інтегрування метод Рунге–Кутти четвертого порядку забезпечує значно меншу похибку, ніж метод Ейлера. Це пояснюється використанням декількох проміжних обчислень на кожному кроці, що дозволяє краще враховувати локальну поведінку розв'язку.

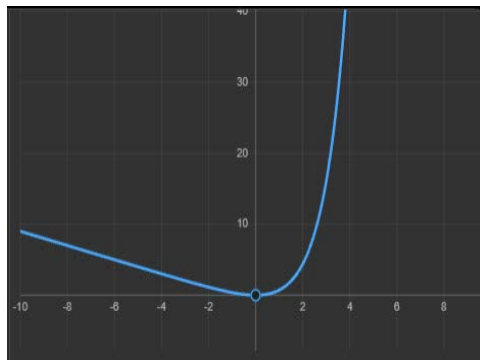


Рисунок 1 Графік загального розв'язку рівняння  $y'=x+y$

Було проведено порівняння популярних онлайн калькуляторів.

Таблиця 1 Порівняльна характеристика онлайн-калькуляторів для розв'язування диференціальних рівнянь

Онлайн-калькулятор	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Побудова графіків
Wolfram Alpha	Так	Так	Так
Symbolab	Так	Так	Так
GeoGebra	Ні	Так	Так
Desmos	Частково	Так	Так

Результати показують, що найбільш універсальними є сервіси Wolfram Alpha та Symbolab, які поєднують можливості символічних і чисельних обчислень. Аналіз показав, що сервіс Wolfram Alpha забезпечує найбільш повний математичний супровід задачі, включаючи аналітичний розв'язок, побудову графіків та додаткові математичні пояснення. Symbolab надає покрокові розв'язання, що є корисним для навчальних цілей. GeoGebra та Desmos орієнтовані переважно на візуалізацію та чисельне дослідження розв'язків, що робить їх зручними для графічного аналізу.

Таблиця 2 – Характеристика методів розв'язування диференціальних рівнянь

Метод	Точність	Швидкість	Застосування
Ейлера	Низька	Висока	Навчальні приклади
Рунге-Кутти 4-го порядку	Висока	Середня	Інженерні розрахунки
Символьні методи	Точний розв'язок	Залежить від складності	Аналітичні дослідження

Розглянемо рівняння  $dy/dx=x+y$  з початковою умовою  $y(0) = 1$  і знайдемо значення розв'язку в точці  $x=1$  (див. табл. 3)

Таблиця 3 Порівняння результатів розв'язування задачі Коші

Метод	Значення $y(1)$	Абсолютна похибка
Аналітичний розв'язок	3,43656	0
Метод Ейлера	3,18748	0,24908
Метод Рунге-Кутти 4-го порядку	3,43650	0,00006

Отримані результати підтверджують, що метод Рунге-Кутти забезпечує значно вищу точність порівняно з методом Ейлера навіть за однакового кроку інтегрування. Саме тому більшість сучасних онлайн-калькуляторів використовують методи вищих порядків для чисельного розв'язування диференціальних рівнянь.

### Висновок

У роботі досліджено сучасні онлайн-калькулятори для розв'язування диференціальних рівнянь та проаналізовано математичні методи, які використовуються для виконання обчислень. Встановлено, що сучасні веб-сервіси поєднують можливості символічних і чисельних обчислень, що дозволяє отримувати як точні аналітичні розв'язки, так і наближені результати для складних задач, які не мають розв'язку в елементарних функціях.

У ході дослідження розглянуто особливості застосування алгоритмів комп'ютерної алгебри, методу Ейлера та методу Рунге-Кутти четвертого порядку. Показано, що символічні методи забезпечують отримання точного розв'язку диференціального рівняння, тоді як чисельні методи дозволяють ефективно знаходити наближені значення розв'язку в заданих точках.

Проведений обчислювальний експеримент для задачі Коші з початковою умовою ( $y(0)=1$ ) підтвердив суттєву різницю в точності чисельних методів. Встановлено, що метод Ейлера при кроці інтегрування ( $h=0,1$ ) дає помітну похибку, тоді як метод Рунге-Кутти четвертого порядку забезпечує результат, який практично збігається з точним аналітичним розв'язком. Отримані дані свідчать про високу ефективність методів вищих порядків для чисельного розв'язування диференціальних рівнянь.

На основі порівняльного аналізу функціональних можливостей онлайн-калькуляторів встановлено, що найбільш універсальними є Wolfram Alpha та Symbolab, які підтримують як символічне розв'язування, так і чисельні методи з графічною візуалізацією результатів. Сервіси GeoGebra та Desmos є зручними інструментами для чисельного аналізу та дослідження поведінки розв'язків за допомогою графіків.

Отримані результати демонструють доцільність використання сучасних онлайн-калькуляторів у навчальному процесі під час вивчення диференціальних рівнянь, оскільки вони сприяють підвищенню наочності матеріалу, спрощують виконання обчислень та дозволяють оцінювати точність різних методів розв'язування. Перспективним напрямом подальших досліджень є аналіз ефективності онлайн-сервісів під час розв'язування систем диференціальних рівнянь та рівнянь вищих порядків.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Wolfram Alpha. Documentation and Mathematical Functions. <https://www.wolframalpha.com> (Дата звернення: 15.05.2026)
2. Symbolab. Differential Equations Solver Documentation. <https://www.symbolab.com/solver/ordinary-differential-equation-calculator> (Дата звернення: 20.05.2026)
3. Бахвалов М. С. Чисельні методи. — Київ: Наукова думка, 2010. 636 стор.
4. Бойчук І. М. Диференціальні рівняння та їх застосування. — Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2018.(174 стр.)

**Токарь Єгор Ігорович**, студент першого курсу факультету будівництва, цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: [egoridze2007@gmail.com](mailto:egoridze2007@gmail.com)

**Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна**, к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, e-mail: [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)

Науковий керівник: Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна — к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, e-mail: [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)

**Tokar Yehor I.**, first-year student, Faculty of Civil, Environmental and Construction Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [egoridze2007@gmail.com](mailto:egoridze2007@gmail.com)

**Sachaniuk-Kavetska Natalia V.**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, e-mail: [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)

Supervisor: Sachaniuk-Kavetska Natalia V., Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, e-mail: [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)