

## Сингулярний розклад (SVD) у розв'язанні систем лінійних рівнянь

Вінницький національний технічний університет

### Анотація

У роботі розглядається сингулярний розклад матриці (SVD) як сучасний та ефективний метод розв'язання систем лінійних рівнянь. Пояснюється, чому класичні методи не завжди забезпечують результат при роботі з великими або майже виродженими системами. Розглянуто геометричний та практичний зміст SVD. Особлива увага приділяється інтуїтивному поясненню методу та його застосуванню у сучасних галузях: машинному навчанні, комп'ютерній графіці, обробці сигналів і аналізі даних. Показано, що SVD дозволяє не лише знаходити розв'язки, а й аналізувати структуру інформації в даних та підвищувати стійкість обчислень.

**Ключові слова:** сингулярний розклад, SVD, системи лінійних рівнянь, стійкість обчислень, найменші квадрати, аналіз даних.

### Abstract

The paper examines the singular value decomposition (SVD) of a matrix as a modern and effective method for solving systems of linear equations. It explains why classical methods do not always provide results when working with large or nearly singular systems. The geometric and practical meaning of SVD, the principle of constructing the pseudoinverse matrix, and finding the least-squares solution are considered. Special attention is given to an intuitive explanation of the method and its applications in modern fields: machine learning, computer graphics, signal processing, and data analysis. It is shown that SVD allows not only finding solutions but also analyzing the structure of information in data and improving computational stability.

**Keywords:** singular value decomposition, SVD, systems of linear equations, computational stability, pseudoinverse matrix, least squares.

### Вступ

Системи лінійних рівнянь є основою великої кількості математичних, технічних та комп'ютерних задач. Вони використовуються в економіці, фізиці, машинному навчанні, програмуванні, інженерії та багатьох інших сферах. Практично будь-яка задача моделювання певного процесу в результаті приводиться до розв'язання системи рівнянь.

На перших етапах вивчення вищої математики основна увага приділяється класичним методам: методу Гауса, формулам Крамера або матричному підходу через обернену матрицю. Для невеликих систем ці методи є зручними та ефективними. Проте, в реальних задачах часто виникають ситуації, коли: система містить велику кількість рівнянь; дані отримані експериментально та мають похибки; матриця є погано обумовленою; кількість рівнянь не збігається з кількістю невідомих. У таких випадках традиційні методи можуть працювати нестабільно. Навіть дуже мала похибка у вихідних даних інколи призводить до значної зміни результату. Через це виникає необхідність у методах, які здатні забезпечити стійкий та надійний розв'язок.

Одним із найбільш ефективних сучасних методів є сингулярний розклад матриці - SVD (Singular Value Decomposition). Цей метод дозволяє не лише знайти розв'язок системи, а й дослідити структуру матриці, визначити її ранг, оцінити рівень нестійкості та побудувати найкраще наближене рішення.

Мета доповіді розглянути сингулярний розклад матриці (SVD) як ефективний метод розв'язання систем лінійних рівнянь.

### Результати дослідження

SVD дозволяє здійснити операції: поворот простору; розтягування або стискання; ще один поворот.

Саме тому, SVD має важливий геометричний зміст. Метод показує, у яких напрямках дані змінюються найбільше, а які напрямки майже не впливають на результат.

Сингулярні числа  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  характеризують важливість відповідних напрямків у просторі даних. Якщо деякі сингулярні числа дуже малі, це означає, що система є нестабільною або містить надлишкову інформацію.

Однією з причин популярності SVD є його наочна геометрична інтерпретація. Будь-яку матрицю можна уявити як деяке перетворення простору. Наприклад, коло після дії матриці може перетворитися на еліпс. SVD показує у яких випадках простір розтягується найбільше, у яких напрямках інформація майже втрачається, які компоненти є найбільш значущими.

Якщо деяке сингулярне число дуже близьке до нуля, це означає, що відповідний напрямок майже стискається в точку. Саме такі ситуації створюють проблеми для класичних методів розв'язання систем рівнянь. Таким чином, SVD дозволяє не лише виконати обчислення, а й зрозуміти внутрішню структуру задачі.

Класичні методи добре працюють лише для «ідеальних» систем. Проте, в реальних задачах дані практично завжди містять похибки. Наприклад, результати вимірювань можуть бути неточними, датчики мають шум, комп'ютерні обчислення виконуються з округленням. У таких умовах навіть незначна помилка здатна викликати суттєву зміну результату. Особливо небезпечними є майже сингулярні матриці. У таких матрицях деякі рядки або стовпці майже лінійно незалежні. Це означає, що система фактично не має однозначного точного результату. Метод Гауса у таких випадках може: накопичувати похибки; давати нестабільні результати; втрачати точність.

SVD дозволяє уникнути цих проблем завдяки аналізу сингулярних чисел. Якщо певне число дуже мале, його можна не враховувати при побудові розв'язку. Це дозволяє відфільтрувати шум і зробити результат стабільнішим.

Одним із найважливіших застосувань SVD є побудова найменш квадратичного розв'язку. У багатьох практичних задачах: система не має точного розв'язку; система містить більше рівнянь, ніж невідомих. У такому випадку, неможливо знайти вектор  $x$ , який точно задовольняє всі рівняння. Тому шукають розв'язок, що мінімізує суму квадратів похибок. SVD є одним із найкращих способів знаходження такого наближення, оскільки забезпечує стійкість, мінімізує вплив шуму, дозволяє контролювати точність результату.

Щоб краще зрозуміти, чому метод SVD є настільки важливим, розглянемо просту практичну ситуацію.

До прикладу, необхідно визначити залежність між певними експериментальними даними. Маємо результати вимірювань температури та тиску під час фізичного експерименту. Через похибки вимірювань дані не є ідеальними, тому система рівнянь виходить суперечливою.

Нехай, задано систему:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 5x + 4y = 7, \\ 7x + 6y = 9. \end{cases}$$

У цій системі дано три рівняння, але лише два невідомих.

Тобто, система є переобумовленою. У більшості випадків така система не має точного розв'язку, який одночасно задовольняє всі рівняння.

Класичний метод Гауса намагатиметься знайти точний результат, але через суперечність даних виникатимуть похибки. Метод SVD підходить до задачі інакше: він шукає не «ідеальний», а найкращий можливий розв'язок.

Матриця системи має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Після виконання сингулярного розкладу:

$$A = U \Sigma V^T$$

отримуємо ортогональні матриці  $U$  та  $V$  та сингулярні числа, які показують напрямки даних.

Далі обчислюється псевдообернена матриця та знаходиться розв'язок:

$$x = V \Sigma^+ U^T B$$

У результаті отримується наближене значення, яке мінімізує суму квадратів похибок.

SVD фактично розуміє, що дані містять шум, і не намагається сліпо знайти точний розв'язок. Метод автоматично знаходить найбільш стабільний варіант відповіді.

Саме тому SVD широко використовується там, де дані ніколи не бувають ідеальними: у прогнозуванні; у медицині; у фінансових моделях; у системах III.

Одне з найвідоміших застосувань SVD - стиснення зображень. Будь-яке цифрове зображення можна представити у вигляді великої матриці чисел. Кожне число відповідає яскравості пікселя. SVD дозволяє розкласти цю матрицю на головні компоненти. Найбільші сингулярні числа містять основну інформацію про зображення, а маленькі – другорядні деталі та шум. Цікаво те, що якщо залишити лише частину найбільших сингулярних чисел, зображення все одно виглядатиме майже однаково для людського ока. Тобто SVD дозволяє суттєво зменшити розмір файлу, при цьому майже не погіршуючи якість зображення. Саме за таким принципом працюють деякі алгоритми стиснення даних та обробки фотографій.

Сьогодні сингулярний розклад використовується у великій кількості сучасних технологій:

- у задачах аналізу великих даних SVD застосовується для: зменшення розмірності; виділення головних компонент; побудови рекомендаційних систем (наприклад, рекомендації фільмів або музики базуються на методах пов'язаних із SVD);

- обробка зображень: стискання зображень; видалення шум; виділяти основні елементи картинки (навіть після видалення частинки сингулярних чисел зображення може залишатися майже незмінним для людського ока);

- комп'ютерна графіка: побудови 3D-моделей; анімації; оптимізації геометричних обчислень;

- фізика та інженерія: аналіз сигналів; обробка експериментальних даних; розв'язання складних систем моделювання.

Основними перевагами SVD є: висока чисельна стійкість; можливість роботи з будь-якими прямокутними матрицями; визначення рангу матриці; побудова найкращого наближеного розв'язку; стійкість до шуму та похибок. Сингулярний розклад матриці є не просто ще одним способом розв'язання систем лінійних рівнянь. Це універсальний інструмент аналізу даних, який дозволяє зрозуміти структуру матриці та забезпечити стійкість обчислень навіть у складних ситуаціях.

На відміну від класичних методів, SVD: працює з нестабільними системами; дозволяє знаходити найменш квадратичні розв'язки; ефективно бореться з похибками та шумом; широко застосовується у сучасних інформаційних технологіях.

Таким чином, сингулярний розклад є одним із ключових методів сучасної прикладної математики та відіграє важливу роль у розвитку комп'ютерних наук, аналізу даних та штучного інтелекту.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Strang G. Linear Algebra and Its Applications, 5th Edition, 2016.
2. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix Computations, 4th Edition, 2013.
3. Trefethen L. N., Bau D. Numerical Linear Algebra, 1997.
4. Meyer C. D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, 2000.

**Марія Олександрівна Михалевич** - студентка групи 4КН-25б, факультет Інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: [mariamihalevic394@gmail.com](mailto:mariamihalevic394@gmail.com)

Науковий керівник: **Майя Борисівна Ковальчук** - д.пед.н., професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: [maya.kovalchuk@gmail.com](mailto:maya.kovalchuk@gmail.com)

**Mariia O. Mykhalevych** - student of group 4KS-25b, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: [mariamihalevic394@gmail.com](mailto:mariamihalevic394@gmail.com)

Supervisor: **Maya B. Kovalchuk** - Doctor of Science (Ped.), Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: [maya.kovalchuk@gmail.com](mailto:maya.kovalchuk@gmail.com)