

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Роботу присвячено застосуванню апарату функцій багатьох змінних для математичного моделювання та оптимізації електричних кіл. За допомогою методів диференціального числення та множників Лагранжа досліджується пошук умовних екстремумів для мінімізації теплових втрат та узгодження опорів для максимальної передачі потужності.

Ключові слова: функції багатьох змінних, електричне коло, оптимізація, метод множників Лагранжа, умовний екстремум, теплові втрати.

Abstract

The work is devoted to programming the apparatus of the function of many variables for mathematical modeling and optimization of electrical circuits. Using the methods of differential calculation and Lagrange multipliers, the search for conditional extrema is investigated for solving practical problems of electrical engineering - minimizing heat losses and matching resistances for maximum power transmission.

Keywords: functions of many variables, electrical circuit, optimization, Lagrange multiplier method, conditional extremum, heat losses.

Вступ

Сучасний етап розвитку електротехніки, радіоелектроніки, мікропроцесорної техніки та великих енергетичних систем характеризується невпинним ускладненням апаратури та масштабів мереж. Проектування розгалужених електричних ланцюгів, інтегральних мікросхем чи систем розподілу живлення (наприклад, Smart Grid) вимагає одночасного врахування величезної кількості параметрів: струмів гілок, вузлових потенціалів, активних та реактивних опорів, ємностей та індуктивностей. У таких умовах класичних методів розрахунку, що спираються виключно на алгебраїчні рівняння або функції однієї змінної, стає вкрай не достатньо [1-2].

Математичним фундаментом для глибокого аналізу та розв'язання цих проблем виступає теорія функцій багатьох змінних (ФБЗ). Застосування багатовимірного диференціального числення дозволяє не просто описувати поточний фізичний стан складних систем, а й цілеспрямовано їх оптимізувати. Інженерні задачі сьогодення вимагають пошуку найкращих режимів роботи за ключовими критеріями: мінімізація втрат енергії (тепловиділення), максимізація коефіцієнта корисної дії (ККД), забезпечення стабільності напруги, мінімізація масогабаритних показників або вартості компонентів. Усі ці задачі зводяться до пошуку екстремумів функцій багатьох змінних.

Актуальність теми зумовлена необхідністю інтеграції фундаментальних математичних методів у практичну площину інженерного проектування. Розуміння того, як фізичні процеси описуються мовою градієнтів, матриць Гессе та множників Лагранжа, є обов'язковою умовою для розробки сучасних систем автоматизованого проектування (САПР) та підвищення енергоефективності пристроїв.

Результати дослідження

У процесі виконання роботи було детально досліджено математичний апарат, що лежить в основі аналізу розгалужених ланцюгів. Результати дослідження можна розділити на кілька ключових напрямків, кожен з яких демонструє перехід від абстрактної математики до конкретної фізичної реалізації.

1. Математична модель електричного кола як скалярного поля багатьох змінних.

Будь-яке електричне коло можна математично представити як топологічний граф, стан якого визначається вектором незалежних змінних. Змінними можуть виступати струми у гілках I_k , напруги на елементах U_k , або фізичні параметри самих компонентів (R , L , C). Будь-яка енергетична або якісна характеристика такого кола (наприклад, сумарна потужність) є функцією багатьох змінних:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Для того, щоб знайти оптимальний режим роботи кола, необхідно дослідити цю функцію на екстремум. Згідно з основами математичного аналізу, необхідною умовою існування екстремуму є рівність нулю повного диференціала функції, що еквівалентно рівності нулю всіх її частинних похідних першого порядку. Математично це означає, що градієнт цільової функції має дорівнювати нульовому вектору:

$$\nabla f = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n} \right) = 0$$

Достатньою умовою для визначення типу екстремуму (мінімум чи максимум) є дослідження матриці других частинних похідних — матриці Гессе. Якщо ця квадратична форма є додатно визначеною, енергетична система перебуває у стані стійкої рівноваги з мінімальними витратами енергії [3].

2. Доведення принципу мінімуму теплової дії (принцип Максвелла).

Однією з найважливіших задач є оптимізація теплових втрат. Згідно із законом Джоуля-Ленца, потужність, що розсіюється на резистивному елементі, дорівнює $I^2 \cdot R$. Для розгалуженого кола, що складається з n паралельних гілок, загальна тепла потужність описується функцією n змінних:

$$P(I_1, I_2, \dots, I_n) = \sum_{k=1}^n I_k^2 R_k$$

Дослідження цієї функції підтверджує фундаментальний фізичний принцип найменшої дії, сформульований Дж. К. Максвеллом: у пасивному лінійному колі струми розподіляються таким чином, щоб загальна генерація тепла (дисипація енергії) була мінімально можливою при заданих зовнішніх джерелах. Проте, цей мінімум не є безумовним.

3. Застосування методу множників Лагранжа для пошуку умовного екстремуму [4].

Струми I_k у гілках кола не можуть набувати довільних значень. Їхня сукупність обмежена топологією графа мережі — а саме, першим законом Кірхгофа (баланс струмів у вузлах). Для кола з m вузлів ми маємо $m-1$ незалежних рівнянь зв'язку:

$$\varphi_j(I_1, I_2, \dots, I_n) = \sum_{k=1}^n a_{jk} I_k = 0, \quad j = 1, \dots, m-1$$

де a_{jk} — коефіцієнти матриці інцидентності (набувають значень 1, -1 або 0).

Оскільки ми маємо цільову функцію P та рівняння зв'язку φ_j , задача оптимізації струморозподілу класифікується у вищій математиці як задача на умовний екстремум. Найбільш потужним аналітичним методом її розв'язання є метод множників Лагранжа. Для цього будується допоміжна функція Лагранжа:

$$L(I_1, \dots, I_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) = \sum_{k=1}^n I_k^2 R_k + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} I_k \right)$$

де φ_j — невідомі множники Лагранжа. Для знаходження мінімуму диференціюємо функцію Лагранжа за кожним струмом I_k і прирівнюємо до нуля:

$$\frac{\delta L}{\delta I_k} = 2 I_k R_k + \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{jk} = 0$$

З цього рівняння випливає результат, який об'єднує чисту математику і фізику. Вираз $I_k R_k$ є спадом напруги на k -й гілці. Якщо ми перенесемо суму з множниками Лагранжа у праву частину, то отримаємо рівняння, що за своєю структурою ідеально відповідає другому закону Кірхгофа (про суму спадів напруг у контурі). У цій математичній моделі множники Лагранжа λ_j набувають абсолютно чіткого фізичного змісту — з точністю до постійного коефіцієнта вони є вузловими потенціалами електричного кола. Таким чином, метод умовного екстремуму математично доводить, що закони Кірхгофа є прямим наслідком енергетичної оптимізації системи.

4. Параметричний синтез кола для передачі максимальної потужності

Функції багатьох змінних застосовуються для синтезу параметрів кола — наприклад, для узгодження навантаження з джерелом живлення. Розглянемо джерело з внутрішнім комплексним опором $Z_i = R_i + jX_i$, до якого підключено навантаження $Z_H = R_H + jX_H$. Активна потужність, що виділяється на навантаженні, є цільовою функцією двох змінних (активного опору R_H та реактивного X_H):

$$P(R_H, X_H) = \frac{E^2 R_H}{(R_i + R_H)^2 + (X_i + X_H)^2}$$

Для знаходження умов передачі максимальної енергії необхідно дослідити цю функцію на безумовний екстремум. Знайшовши частинні похідні за обома змінними та прирівнявши їх до нуля $\frac{\delta P}{\delta R_H} = 0$ та $\frac{\delta P}{\delta X_H} = 0$, отримуємо систему, розв'язком якої є: $X_H = -X_i$ (компенсація реактивності) та $R_H = R_i$.

Таким чином, за допомогою аналізу екстремумів ФБЗ строго доводиться класична теорема електротехніки: для передачі максимальної потужності імпеданс навантаження має бути комплексно-спряженим до імпедансу джерела ($Z_H = Z_i^*$).

Висновок

Проведений аналіз показав, що використання диференціального числення функцій багатьох змінних в електротехніці дає змогу описувати та досліджувати електричні кола за допомогою математичних методів. Знаходження градієнтів цільових функцій і пошук умовних екстремумів методом множників Лагранжа дозволяють визначати найкращі значення параметрів електричних кіл за заданих обмежень. Це створює основу для розробки ефективних алгоритмів оптимізації та підвищення точності електротехнічних розрахунків. Вони є основою сучасних комп'ютерних методів моделювання (наприклад, у середовищах MATLAB, Simulink чи SPICE), де кількість змінних може сягати мільйонів, а вручну знайти оптимальне рішення неможливо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Rahmani-Andebili M. Advanced Electrical Circuit Analysis: Practice Problems, Methods, and Solutions. — Cham: Springer, 2022. — 152 p.
2. Borkar V. S., Rao K. S. M. Elementary Convexity with Optimization. — Singapore: Springer, 2023. — 148 p.
3. Фіхтенгольц Г. М. Курс диференціального та інтегрального числення: Навч. посібник. В 3-х т. — Т. 1. — К.: Вища школа, 2002. — 600 с.
4. Шегедин О. І., Маляр В. С. Теоретичні основи електротехніки: Підручник. — Львів: Магнолія-2006, 2010. — 512 с.

Уткін Богдан Іванович, студент першого курсу, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, ubogdan673@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна, к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Utkin Bohdan I., first-year student Faculty of Electric Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, ubogdan673@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com