

# МАТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТІЙКОСТІ НАДВИСОТНИХ СПОРУД ПІД ДІЄЮ ВІТРОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ (НА ПРИКЛАДІ ХМАРОЧОСА БУРДЖ ХАЛІФА)

Вінницький національний технічний університет

## Анотація.

У роботі запропоновано матричний підхід до оцінки статичної стійкості надвисотних споруд під дією вітрових навантажень. Будівлю дискретизовано як вертикальну систему вузлів; побудовано глобальну матрицю жорсткості  $K$ . Для статичного аналізу розв'язано систему  $KX=F$ . Наведено спрощену модель Burj Khalifa (трирівнева), приклади розрахунків у Google Colab та інженерні висновки щодо розподілу відхилень. Результати підтверджують практичну придатність матричного підходу для попередніх інженерних оцінок.

**Ключові слова:** матриця жорсткості; статичний аналіз; вітрове навантаження; Burj Khalifa; чисельні методи; Maple; Google Colab; Python

## Abstract.

This paper proposes a matrix-based approach for assessing the static stability of supertall structures under wind loads. The structure is discretized as a vertical system of nodes, and a global stiffness matrix  $K$  is constructed. For static analysis, the system  $KX=F$  is solved. A simplified model of the Burj Khalifa (three-level) is presented, along with calculation examples in Google Colab and engineering conclusions regarding the distribution of deflections. The results confirm the practical suitability of the matrix approach for preliminary engineering assessments.

**Keywords:** stiffness matrix; static analysis; wind load; Burj Khalifa; numerical methods; Maple; Google Colab; Python

## Вступ

Актуальність проблеми обумовлена зростанням висотності сучасних споруд та відповідним збільшенням впливу вітрових навантажень. Burj Khalifa (828 м) є прикладом споруди, де форма і розподіл жорсткості критично впливають на поведінку споруди під дією вітрових навантажень [1]. На висоті понад 800 метрів вітрові потоки створюють колосальний тиск на конструкцію, внаслідок чого вона може перекинутись або зламатись [2]. Для забезпечення безпеки вежі Бурдж Халіфа інженери використали унікальну трипроменеву форму («Y-подібну»), яка розсіює вітер, а розрахунок коливань споруди було виконано за допомогою лінійної алгебри – методу матриці жорсткості [3].

Мета роботи – розробити зрозумілу матричну модель для оцінки статичних відхилень надвисотної споруди під дією вітрових навантажень. Завдання роботи полягає у побудові дискретної моделі конструкції, виконанні статичного розрахунку, демонстрації прикладів реалізації обчислень у середовищі Google Colab із використанням мови програмування Python, а також формуванні інженерних висновків щодо напружено-деформованого стану та характеру розподілу переміщень конструкції.

## Результати дослідження

Суть математичного методу: Будівля моделюється як вертикальна консоль, розбита на сектори (нижня частина, середня частина, шпиль). Зв'язок між силами вітру та реальним відхиленням (хитанням) хмарочоса описується фундаментальним матричним рівнянням [3]:

$$K \cdot X = F. \quad (1)$$

де:  $K$  – матриця жорсткості будівлі, яка залежить від властивостей залізобетонного ядра та товщини стін;  $F$  – вектор вітрового навантаження, тобто це сила тиску вітру на різних рівнях висоти;  $X$  – вектор лінійних переміщень, він показує, на скільки метрів зміститься кожен рівень вежі під цим тиском.

На рис. 1 схематично зображено конструктивну систему Burj Khalifa: залізобетонне ядро, сталевий каркас та вузли жорсткості (нижній рівень, середній рівень, шпиль). Ілюстрація надає інформацію, як ядро та фундаментна плита забезпечують стійкість споруди при значних вітрових навантаженнях.

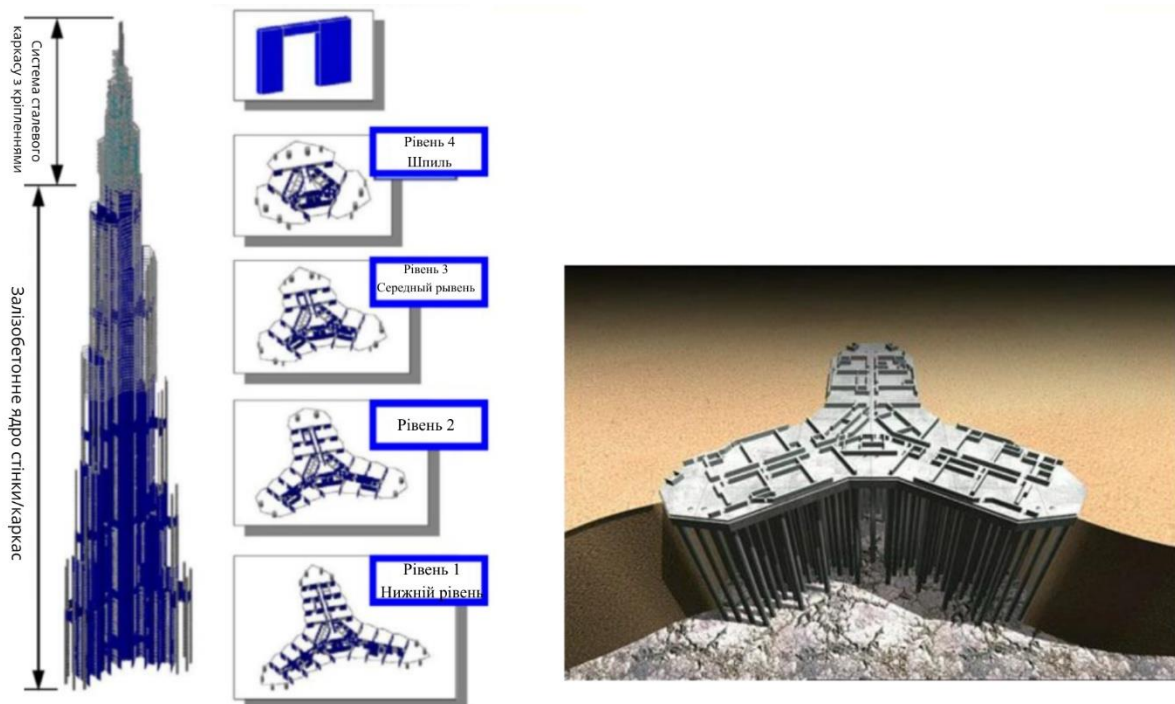


Рис. 1 – Схематичне зображення конструктивної системи Burj Khalifa

Розглянемо приклад розрахунку для спрощеної моделі Burj Khalifa з трьома рівнями:

$$K = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix},$$

де перший рівень має жорсткість 5 та зв'язок із другим рівнем (-2); другий рівень пов'язаний із першим і третім (жорсткість 3, зв'язки -2 та -1); третій рівень (шпиль) має жорсткість 1 та зв'язок із середнім рівнем (-1); вектор сил F показує дію вітру: 10 умовних одиниць на нижній рівень, 20 – на середній та 30 – на шпиль.

Замість складного пошуку оберненої матриці вручну, розв'яжемо цю систему лінійних рівнянь методом Гауса із використанням СКМ Maple (рис. 2) [4], [5]. В результаті обчислень ми отримали вектор відхилень:

$$X = \begin{bmatrix} 20 \\ 45 \\ 75 \end{bmatrix}.$$

Отже, нижня частина будівлі відхиляється на 20 умовних одиниць; середня частина – на 45, а шпиль – на 75, тобто має найбільше відхилення. Це підтверджує інженерний принцип, що **верхні рівні споруди найбільш чутливі до вітрових навантажень**, тому саме там потрібні додаткові заходи жорсткості та демпфування.

Також розглянемо наочний приклад використання сучасних інструментів для перевірки розрахунків. Встановлювати Python на комп'ютер зовсім не обов'язково – сьогодні програмувати та виконувати математичні обчислення можна прямо у звичайному браузері. Для демонстрації було використано онлайн середовище **Google Colab**, де система рівнянь (1) розв'язується автоматично за допомогою команди

$numpy.linalg.solve(K, F)$  (рис. 3 та 4) [6], [7]. Вона демонструє, як комп'ютер може миттєво виконати те, що вручну потребувало б десятків кроків.

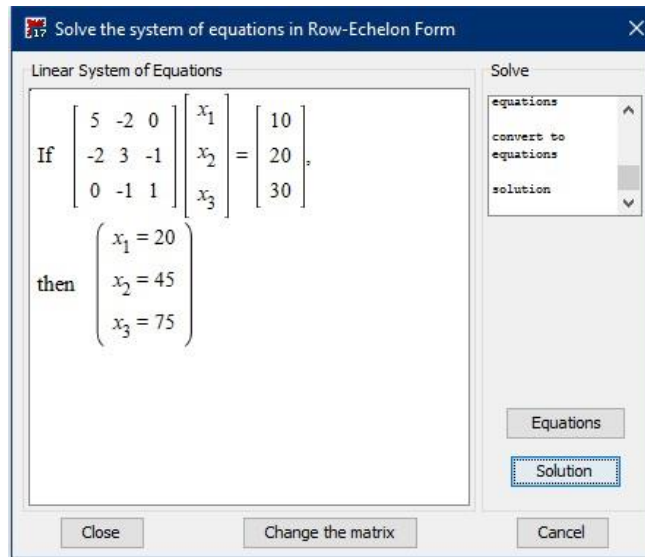


Рис 2. Розв'язання системи лінійних рівнянь методом Гауса із використанням СКМ Maple

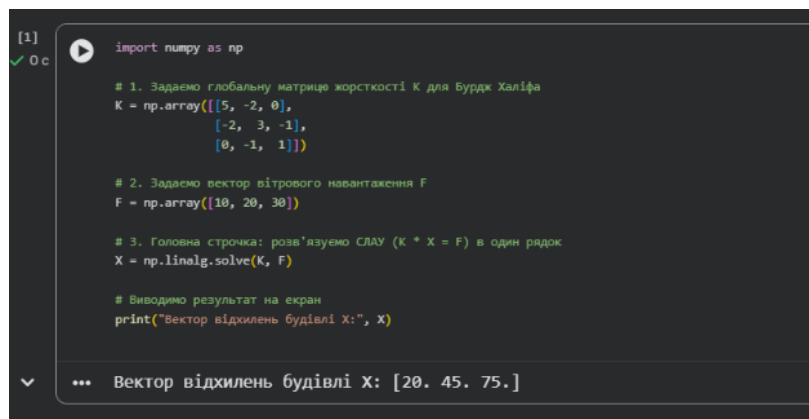


Рис 3. Розв'язання системи лінійних рівнянь за допомогою Python в середовищі Google Colab

Google Colab дозволяє показати різницю між традиційним способом розрахунку та можливостями комп'ютера. Якщо вручну ми можемо розв'язати невелику систему рівнянь, наприклад  $3 \times 3$ , то сучасні комп'ютери здатні працювати з матрицями у тисячі рядків і стовпців. Для прикладу, система розміром  $5000 \times 5000$  містить 25 мільйонів елементів – для людини це було б непосильне завдання, а онлайн сервіс виконує його за лічені хвилини.

Для більшої наочності можна задати велику матрицю з простою закономірністю (наприклад, заповнену однаковими або послідовними числами). Це дає можливість показати на екрані саму матрицю, вектор сил та отриманий результат (рис. 4), щоб підкреслити масштабність обчислень.

### Висновки

У реальних умовах для сучасних надвисотних будівель використовують матриці значно більшого розміру – від кількох тисяч до сотень тисяч рівнянь. Саме тому інженери застосовують методи вищої математики та потужні обчислювальні алгоритми, щоб моделювати поведінку конструкцій під дією вітру, землетрусів та інших навантажень. Це забезпечує точність прогнозів і надає можливість створювати безпечні та стійкі споруди у світі сучасного будівництва.

```

import numpy as np

# 1. Створимо конкретну матрицю жорсткості K розміром 5x5 (всі числа випадкові)
K = np.array([
    [10, -2, 0, 0, 0],
    [-2, 12, -3, 0, 0],
    [0, -3, 15, -4, 0],
    [0, 0, -4, 11, -2],
    [0, 0, 0, -2, 8]
])

# 2. Задано конкретний вектор сил вітру F (наприклад, тиск зростає з висотою)
F = np.array([10, 20, 30, 40, 50])

# Повітряняємо комп'ютеру розв'язати це рівняння
X = np.linalg.solve(K, F)

# 3. Виводимо все на екран, щоб бачити вхідні дані та результат
print("--- ВХІДНІ ДАНІ ---")
print("Матриця жорсткості будівлі K (5x5):")
print(K)

print("\nВектор вітрового навантаження F:")
print(F)

print("\n--- ХІД ОБЧИСЛЕННЯ ---")
print("Команда np.linalg.solve(K, F) виконує аналог методу Гаусса...")

print("\n--- РЕЗУЛЬТАТ ---")
print("Точний вектор відхилень будівлі X (значення для кожного з 5 рівнів):")
print(X)

*** --- ВХІДНІ ДАНІ ---
Матриця жорсткості будівлі K (5x5):
[[10 -2  0  0  0]
 [-2 12 -3  0  0]
 [ 0 -3 15 -4  0]
 [ 0  0 -4 11 -2]
 [ 0  0  0 -2  8]]

Вектор вітрового навантаження F:
[10 20 30 40 50]

--- ХІД ОБЧИСЛЕННЯ ---
Команда np.linalg.solve(K, F) виконує аналог методу Гаусса...

--- РЕЗУЛЬТАТ ---
Точний вектор відхилень будівлі X (значення для кожного з 5 рівнів):
[1.60611546  3.03057728  4.38489883  6.67043765  7.91760941]

```

Рис 4. Розв'язання СЛР розміром 5x5 за допомогою Python в середовищі Google Colab

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Abdelrazaq A. Validating the Structural Behavior and Response of Burj Khalifa: Synopsis of the Full Scale Structural Health Monitoring Programs. International Journal of High-Rise Buildings. 2012. doi:10.21022/IJHRB.2012.1.1.037
2. Литвин О.В. Методика врахування процесу ущільнення ґрунтів при оцінці взаємодії конструкцій з ґрунтовою основою методом скінченних елементів // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2024. – Вип. 113. – С. 352–359.
3. Чеканович М.Г. Розрахунок будівельних конструкцій : навчальний посібник / М. Г. Чеканович, О. Є. Янін. – Видання 2-ге, доповнене і перероблене. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2021. – 240 с.
4. Dobraniuk Yurii Application SKM Maple to reduce the quadratic form of expression to the canonical form / Yurii Dobraniuk, Nadiya Blashchuk, Maksym Barbaliuk // V International Scientific and Practical Internet Conference "Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity", (Vinnytsia, May 1 - 2, 2025): book of abstracts [Electronic network scientific publication]. Vinnytsia, 2025, P. 46 - 48.
5. Галяновська В. О. Оптимізація геометрії монолітного фундаменту будівлі методом екстремального аналізу площі будівлі [Електронний ресурс] / В. О. Галяновська, Р. Р. Краєвська, Ю. В. Добранюк // Матеріали Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих науковців «Молодь в науці: дослідження, проблеми, перспективи (МН-2026)», Вінниця, 22-26 червня 2026 р. – 4 с. – Електрон. текст. дані. – 2026. – Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/mn/mn2026/paper/viewFile/27314/22342>.
6. NumPy Developers. Документація функції numpy.linalg.solve [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.solve.html> (дата звернення: 26.05.2026).
7. Google. Google Colab [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://colab.research.google.com/> (дата звернення: 26.05.2026).

**Добранюк Юрій Володимирович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: [dobraniuk@vntu.edu.ua](mailto:dobraniuk@vntu.edu.ua).

**Паас Анастасія Володимирівна** – студентка групи ІБМ-25б, Факультет будівництва цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: [anastasiapaas@gmail.com](mailto:anastasiapaas@gmail.com).

**Dobraniuk Yurii V.** – Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of Department of Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [dobraniuk@vntu.edu.ua](mailto:dobraniuk@vntu.edu.ua).

**Paas Anastasia V.** – student of group IBM-25b, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [anastasiapaas@gmail.com](mailto:anastasiapaas@gmail.com).