УДК 517.521.2

О. М. Святкіна
М. Б. Ковальчук

СУЧАСНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено знакозмінні числові ряди, їх властивості та практичне застосування у наближених обчисленнях. Основну увагу приділено ознаці Лейбніца як важливому критерію збіжності знакозмінних рядів і способу оцінювання похибки. Розглянуто поняття абсолютної та умовної збіжності, а також особливості поведінки умовно збіжних рядів відповідно до теореми Рімана. Показано, що знакозмінні ряди широко використовуються в математичному аналізі, програмуванні, фізиці, комп'ютерній графіці, цифровій обробці сигналів та сучасних інформаційних технологіях. Наведено історичні відомості про розвиток теорії знакозмінних рядів та приклади їх практичного застосування.

Ключові слова: знакозмінні ряди, збіжність, ознака Лейбніца, абсолютна збіжність, умовна збіжність, наближені обчислення, математичний аналіз.

Abstract

The paper investigates alternating numerical series, their properties, and practical applications in approximate calculations. Special attention is paid to Leibniz's test as an important criterion for the convergence of alternating series and a method for estimating computational errors. The concepts of absolute and conditional convergence are analyzed, as well as the behavior of conditionally convergent series according to Riemann's theorem. It is shown that alternating series are widely used in mathematical analysis, programming, physics, computer graphics, digital signal processing, and modern information technologies. Historical facts about the development of the theory of alternating series and examples of their practical applications are also presented.

Keywords: alternating series, convergence, Leibniz test, absolute convergence, conditional convergence, approximate calculations, mathematical analysis.

Вступ

Знакозмінні ряди займають важливе місце в математичному аналізі, оскільки дозволяють виконувати наближені обчислення складних функцій і математичних виразів, які неможливо обчислити у простій замкненій формі. Їх особливістю є почергове чергування додатних і від'ємних членів, що забезпечує часткову компенсацію значень і сприяє підвищенню точності наближень.

У сучасній математиці, фізиці, інженерії та комп'ютерних технологіях знакозмінні ряди мають надзвичайно важливе значення. Вони використовуються у чисельних методах, математичному моделюванні, програмуванні, цифровій обробці сигналів, комп'ютерній графіці та багатьох інших галузях науки й техніки. Особливо важливим є те, що знакозмінні ряди дозволяють контролювати похибку обчислень, що робить їх ефективним інструментом сучасних інформаційних технологій.

Метою роботи є дослідження властивостей знакозмінних рядів, аналіз ознаки Лейбніца та визначення ролі знакозмінних рядів у наближених обчисленнях і практичних задачах сучасної науки.

Результати дослідження

Історія знакозмінних рядів є дуже цікавою та пов'язана з розвитком математичного аналізу. У XVII столітті Готфрід Вільгельм Лейбніц [1] запропонував знаменитий ряд для обчислення числа π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Для свого часу це було справжнім проривом, адже дозволяло знаходити наближене значення числа π лише за допомогою додавання та віднімання дробів. Якщо обчислити кілька перших членів ряду, можна отримати наближене значення числа π:

$$4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \approx 2{,}895$$

При збільшенні кількості членів значення поступово наближається до точного:

$$\pi \approx 3{,}14159$$

Цікаво, що подібні знакозмінні ряди були відомі ще математикам Керальської школи в Індії приблизно за двісті років до Лейбніца. Вони також використовували нескінченні ряди для наближеного обчислення числа π. Це свідчить про те, що ідея знакозмінних рядів має дуже давнє походження.

Основною особливістю знакозмінних рядів $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, де $a_n > 0$ є взаємна компенсація додатних і від'ємних членів. На відміну від рядів, у яких усі доданки мають однаковий знак, знакозмінні ряди часто збігаються навіть у тих випадках, коли відповідний ряд із додатних членів є розбіжним. Саме чергування знаків забезпечує стабілізацію часткових сум і наближення їх до певного значення.

Одним із найважливіших критеріїв збіжності знакозмінних рядів є ознака Лейбніца [2, 3]. Дана ознака має не лише теоретичне, а й велике практичне значення, оскільки дозволяє встановлювати збіжність ряду без складних інтегральних чи граничних перетворень. Вона також дає уявлення про швидкість збіжності ряду: чим швидше зменшуються члени a_n, тим швидше часткові суми наближаються до істинного значення.

Геометрично поведінку знакозмінного ряду можна пояснити тим, що його часткові суми почергово перевищують і не досягають істинного значення суми. При цьому кожне наступне відхилення стає меншим. Якщо розглядати часткові суми з парною та непарною кількістю членів, то парні часткові суми утворюють монотонно зростаючу послідовність, а непарні — монотонно спадну. Обидві послідовності є обмеженими та прямують до одного й того самого числа, яке і є сумою ряду (рис.1).

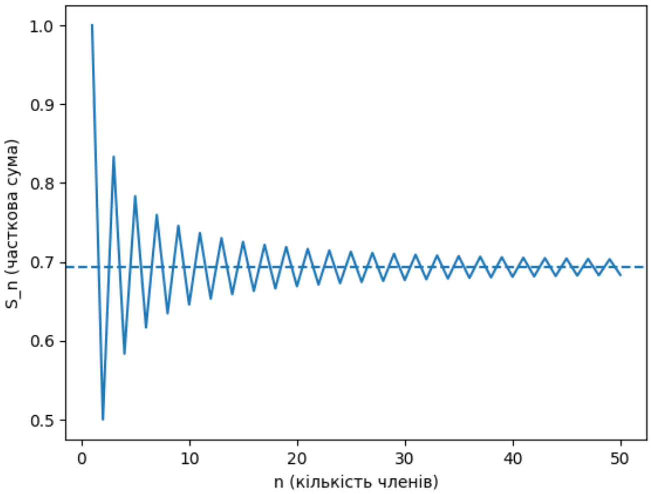

Рисунок 1 - Поведінка часткових сум знакозмінного гармонічного ряду

Саме ця властивість пояснює, чому знакозмінні ряди є надзвичайно зручними у наближених обчисленнях. Якщо ряд задовольняє умови ознаки Лейбніца, то похибку після обчислення перших n членів можна оцінити дуже просто:

$$|R_n| \leq a_{n+1}$$

Це означає, що модуль похибки не перевищує першого відкинутого члена ряду. Таким чином, для досягнення необхідної точності достатньо знайти такий номер n, при якому наступний член стане меншим за допустиму похибку. Завдяки цьому знакозмінні ряди активно використовуються у чисельних методах та комп'ютерних алгоритмах.

Класичним прикладом знакозмінного ряду є знакозмінний гармонічний ряд:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Цей ряд є збіжним за ознакою Лейбніца, оскільки його члени монотонно спадають і прямують до нуля. Якщо взяти лише перші чотири члени ряду, отримаємо наближене значення:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \approx 0{,}5833$$

При цьому похибка не перевищує наступного члена:

$$|R_4| \leq \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Якщо ж узяти більше членів ряду, наприклад шість або вісім, похибка стане ще меншою. Це демонструє ефективність знакозмінних рядів у практичних обчисленнях.

Особливо цікавим явищем у теорії знакозмінних рядів є теорема Рімана про перестановку доданків. Вона показує, що умовно збіжні ряди мають нестійку природу. Якщо переставляти члени такого ряду, його сума може змінитися. Більше того, умовно збіжний ряд можна перебудувати так, щоб він збігався до будь-якого наперед заданого числа або навіть став розбіжним. Це виглядає парадоксально, оскільки у звичайній арифметиці перестановка доданків не змінює результату.

Особливо показовим прикладом є саме знакозмінний гармонічний ряд. Якщо почати групувати його члени по-іншому, наприклад брати по два додатних члени та одному від'ємному, сума ряду зміниться. Саме тому умовно збіжні ряди інколи порівнюють із “крихкими конструкціями”, стабільність яких залежить від порядку елементів.

У сучасних технологіях знакозмінні ряди використовуються надзвичайно широко. Коли людина використовує калькулятор або комп'ютер для обчислення функцій *sin(x), cos(x), arctg(x)* чи *ln(x),* процесор фактично виконує наближені обчислення через ряди Тейлора та Маклорена. Наприклад, розклад функції синуса має вигляд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{7}{7!} + \cdots$$

Багато таких розкладів є саме знакозмінними рядами. Комп'ютер додає лише кілька перших членів ряду і отримує результат із дуже високою точністю. Ознака Лейбніца дозволяє визначити, коли можна припинити обчислення, оскільки наступні члени вже майже не впливають на результат.

Важливу роль знакозмінні ряди відіграють у комп'ютерній графіці. Під час створення тривимірних моделей, анімації та графічних ефектів постійно використовуються тригонометричні функції, значення яких обчислюються через ряди. Саме тому сучасна графіка, 3D-ігри та системи візуалізації безпосередньо пов'язані з наближеними обчисленнями.

У цифровій обробці сигналів знакозмінні ряди допомагають очищати звук від шуму, стискати зображення та покращувати якість аудіо- й відеосигналів. Коли смартфон під час дзвінка усуває сторонні шуми або обробляє фотографії у форматі JPEG, використовуються математичні алгоритми, що базуються на розкладанні функцій у ряди. Знакозмінні члени дозволяють компенсувати небажані коливання та зберігати основну інформацію.

Не менш важливими є застосування знакозмінних рядів у фізиці. Вони використовуються при дослідженні хвильових процесів, електромагнітних коливань і квантової механіки. За допомогою рядів фізики можуть описувати складні процеси через простіші математичні вирази. Під час обчислення енергетичних рівнів атомів чи квантових станів часто виникають саме знакозмінні ряди. Якщо такий ряд не збігається, результати математичної моделі можуть втратити фізичний зміст.

В інженерії знакозмінні ряди використовуються для моделювання конструкцій, коливань мостів, електричних схем та систем автоматичного керування. Особливо важливими вони є у задачах, де необхідно швидко отримати результат із невеликою похибкою.

Знакозмінні ряди стали основою багатьох сучасних чисельних методів, які використовуються у штучному інтелекті, робототехніці, моделюванні клімату, авіації та космічних дослідженнях. Наприклад, під час польоту літака комп'ютер постійно виконує велику кількість наближених обчислень, де надзвичайно важливими є швидкість і контроль похибки. Саме тому принципи, закладені в ознаці Лейбніца, залишаються актуальними навіть у високотехнологічних системах XXI століття.

Принцип збіжності знакозмінних рядів можна пояснити навіть на простому життєвому прикладі. Уявімо, що людина намагається встановити комфортну температуру у кімнаті на рівні 22°C. Спочатку температура збільшується на +5°C, потім зменшується на −3°C, далі додається лише +1°C, а потім −0,5°C. Кожна наступна зміна стає меншою. У результаті температура починає коливатися навколо потрібного значення та поступово наближається до нього. Саме так поводяться часткові суми знакозмінного ряду: вони поперемінно перевищують і не досягають істинного значення, але поступово збігаються до певної межі.

Таким чином, знакозмінні ряди є не лише важливим об'єктом математичного аналізу, а й потужним інструментом сучасної науки та технологій. Їх використання дозволяє поєднати точність математичних розрахунків із практичною можливістю швидкого та ефективного обчислення складних функцій.

Висновки

Знакозмінні ряди є важливим інструментом математичного аналізу та наближених обчислень. Їх головною особливістю є почергове чергування знаків доданків, що забезпечує компенсацію похибок і сприяє збіжності ряду. Ознака Лейбніца дозволяє легко встановлювати збіжність знакозмінних рядів і оцінювати похибку обчислень, що робить її одним із найважливіших критеріїв математичного аналізу.

У роботі було розглянуто поняття абсолютної та умовної збіжності, а також показано нестійкість умовно збіжних рядів відповідно до теореми Рімана. Доведено, що знакозмінні ряди мають важливе практичне значення та широко використовуються у програмуванні, комп'ютерній графіці, цифровій обробці сигналів, фізиці, інженерії, штучному інтелекті та сучасних інформаційних технологіях.

Отже, знакозмінні ряди можна розглядати не лише як теоретичний об'єкт математичного аналізу, а і як універсальний метод наближених обчислень, який забезпечує точність, ефективність та можливість контролю похибки у складних математичних і технічних задачах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. How Leibniz tried to tell the world he had squared the circle [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://philarchive.org/archive/STRHLT
2. Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І., Ковальчук М. Б. Теорія рядів./ Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко, М. Б.Ковальчук. Навчальний посібник. - Вінниця : ВНТУ, 2008. 138 с.
3. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика». Ч. 10. Числові та функціональні ряди [Електронний ресурс] / уклад. М. Б. Ковальчук. – Вінниця : ВНТУ, 2025. 29 с.

Ольга Миколаївна Святкіна – студентка групи 4КН-25б, факультет Інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: sviatkinaolya@gmail.com

Науковий керівник: ***Майя Борисівна Ковальчук*** **-** д.пед.н., професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Olha M. Sviatkina - student of group 4KN-25b, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: sviatkinaolya@gmail.com

Supervisor: ***Maya B*. *Kovalchuk*** - Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com