УДК 004.92:519.6

Д. К. Руденко
О. П. Прозор

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ ЗАСОБАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Анотація

У роботі проаналізовано роль диференціальних рівнянь та інтегрального числення в задачах комп'ютерної графіки. Розглянуто рівняння рендерингу як інтегральне рівняння перенесення світла, метод Рунге-Кутта четвертого порядку для чисельного інтегрування траєкторій, масово-пружинні системи для симуляції деформованих об'єктів, а також інтеграл оптичної пропускності у об'ємному рендерингу.

Ключові слова: комп'ютерна графіка, рівняння рендерингу, метод Рунге-Кутта, фізична симуляція, визначений інтеграл, диференціальні рівняння, об'ємний рендеринг.

Abstract

The paper analyzes the application of differential equations and integral calculus in computer graphics problems. Based on the analysis of fundamental sources in the field, the rendering equation as an integral equation of light transport, the fourth-order Runge-Kutta method for numerical integration of trajectories, mass-spring systems for simulating deformable objects, and the optical transmittance integral in volume rendering are considered.

Keywords: computer graphics, rendering equation, Runge-Kutta method, physical simulation, definite integral, differential equations, volume rendering.

Вступ

Комп'ютерна графіка характеризується широким використанням математичних методів і моделей. Як підкреслюють Marschner та Shirley [1], процес генерації зображення на екрані передбачає використання двох взаємодоповнюючих підходів − трасування променів та растеризації − обидва спираються на аналітичну геометрію та методи інтегрального числення. Диференціальні рівняння та визначений інтеграл є математичною основою для широкого класу задач: від моделювання поширення світла до симуляції фізичної поведінки об'єктів у реальному часі.

Pharr, Jakob та Humphreys у своїй праці [2] підкреслюють, що фізично коректний рендеринг у своїй основі є задачею обчислення інтегралів у просторі напрямків та точок поверхні. Своєю чергою, Catto [3] демонструє, що фізичні симуляції в іграх − практично завжди пов'язані з чисельним розв'язанням систем диференціальних рівнянь. Метою цієї роботи є огляд застосування математичного апарату диференціальних рівнянь та інтегрального числення для створення реалістичних зображень із наведенням ключових математичних формулювань.

Рівняння рендерингу як інтегральна модель перенесення світла

Центральним поняттям у фотореалістичному рендерингу є рівняння рендерингу (rendering equation), сформульоване Kajiya у 1986 році [4]. Воно узагальнює широкий клас алгоритмів рендерингу та описує потік світла в сцені як суму власного випромінювання поверхні та відбитого світла від усіх можливих напрямків півсфери. Згідно з [4], рівняння має вигляд:

$$L_o(x,\, \omega_0) \,=\, L_e(x,\, \omega_0) \,+\, \int_\Omega f_r(x,\, \omega_i,\, \omega_0) \,\cdot\, L_i(x,\, \omega_i) \,\cdot\, (\,\omega_i \,\cdot\, n)\, d\, \omega_i, \tag{1}$$

де $L_o(x,\, \omega_0)$ − загальна спектральна радіансність (щільність потоку випромінювання на одиницю площі); $L_e(x,\, \omega_0)$ − власне світло об'єкта ; f_r − функція розподілу двонаправленого відбиття (BRDF), яка визначає частку світла, що відбивається від напрямку ω_i у напрямок ω_0; $L_i(x,\, \omega_i)$ − вхідна радіансність, що падає на точку x із напрямку ω_i; n − нормаль до поверхні; інтегрування ведеться по верхній півсфері Ω, що містить усі можливі напрямки падіння світла.

Як показано у [2], точне аналітичне обчислення інтеграла (1) можливе лише для тривіальних сцен. У загальному випадку використовують стохастичне наближення методом Монте-Карло − оцінку інтеграла за випадковими вибірками:

$$\int_{\Omega} f(\omega)\, d\omega \;\approx\; \left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{f(\omega_k)}{p(\omega_k)}, \qquad (2)$$

де N − кількість вибіркових напрямків ω_k, що генеруються з щільністю розподілу $p(\omega_k)$. Похибка оцінки $O(N^{-1/2})$ визначає компроміс між якістю зображення та часом обчислення.

Алгоритм трасування шляхів (Path Tracing), що безпосередньо реалізує стохастичне розв'язання рівняння (1), є на сьогодні домінуючим методом рендерингу у кінематографічному виробництві [2]. Кожен піксель фінального зображення є результатом наближення визначеного інтеграла (2) за N випадковими шляхами розповсюдження світла. Чим більше N − тим точніше наближення інтеграла і тим чистіше зображення.

Порівняння підходів до наближення інтеграла рендерингу

Таблиця 1. Порівняльні характеристики методів наближення інтегралу рендерингу

Метод	Збіжність	Дисперсія	Принцип роботи	Застосування у графіці
Проста вибірка Монте-Карло	$O(N^{-1/2})$	Висока	Рівномірні випадкові напрямки по півсфері	Базовий Path Tracing, навчальні реалізації
Важлива вибірка (IS)	$O(N^{-1/2})$	Знижена	Вибірка з $p(\omega)$ пропорційно до BRDF·cosθ, що зменшує дисперсію	BRDF-семплінг, NEE (Next Event Estimation)
Квазі-МК (Halton, Sobol)	$O(N^{-1}(LogN)^\wedge s)$	Найнижча	Детерміновані низькодискрепантні послідовності замість псевдовипадкових	Денойзинг, рендеринг у реальному часі (RTX)

Диференціальні рівняння у фізичних симуляціях

Catto у своїй лекції на GDC 2015 [3] демонструє, що фізичні рушії ігор оперують системами диференціальних рівнянь. Рух матеріальної точки під дією сил описується другим законом Ньютона:

$$dv/dt \;=\; F(x, v, t)\,/\,m, \quad dx/dt \;=\; v, \qquad (3)$$

де x − положення, v − швидкість, F − рівнодійна сил, m − маса. Більшість фізичних задач у іграх є системами таких рівнянь для множини тіл, де сили включають гравітацію, пружні зв'язки, тертя та опору [3].

За Catto [3], одним із найбільш поширених у практиці ігрових рушіїв, є метод Рунге-Кутта четвертого порядку (RK4). Для загального рівняння $dy/dt = F(t, y)$ з кроком h метод обчислює чотири проміжні оцінки нахилу:

$$k_1 \;=\; f(t_{\mathrm{n}}, y_{\mathrm{n}}), \qquad (4)$$

$$k_2 \;=\; f(t_{\mathrm{n}} + h/2,\; y_{\mathrm{n}} + h \cdot k_1/2), \qquad (5)$$

$$k_3 \;=\; f(t_{\mathrm{n}} + h/2,\; y_{\mathrm{n}} + h \cdot k_2/2), \qquad (6)$$

$$k_4 \;=\; f(t_{\mathrm{n}} + h,\; y_{\mathrm{n}} + h \cdot k_3), \qquad (7)$$

$$y_{\mathrm{n+1}} \;=\; y_{\mathrm{n}} + (h/6) \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad (8)$$

Метод RK4 має четвертий порядок точності: локальна похибка на кроці становить $O(h^5)$, глобальна − $O(h^4)$ [3]. При зменшені кроку вдвічі глобальна похибка скорочується в 16 разів, що дозволяє знаходити баланс між точністю симуляції та обчислювальними витратами на кадр.

Для симуляції динамічності деформованих об'єктів (тканин, волосся тощо) застосовують підхід на основі масово-пружинних систем. Відповідно автори джерела [5] описують рівняння руху i-го вузла масово-пружинної системи диференціальним рівнянням другого порядку:

$$m_i x_i'' \;=\; \Sigma_j\, k_{ij} \cdot (|x_i - x_j| - L_0) \cdot (x_j - x_i)/|x_j - x_i| - c x_i' + F_{ext}, \qquad (9)$$

де m_i – маса i -ої точки, x_i – її положення, x_i' – її швидкість, x_i'' – її прискорення, k_{ij} – коефіцієнт жорсткості пружини між точками i та j, L_0 – довжина пружини у стані спокою, c – коефіцієнт в'язкого затухання, F_{ext} – зовнішні сили (гравітація, вітер). Автори [5] зазначають, що система з N вузлів утворює $3N$ диференціальних рівнянь другого порядку, що зводяться до $6N$ диференціальних рівнянь першого порядку.

Визначений інтеграл в об'ємному рендерингу

Fong та ін. [6] описують фізичну модель об'ємного рендерингу, модель якого ґрунтується на рівнянні перенесення випромінювання крізь середовище з частинками (хмари, туман, дим). Ключовою величиною є оптична пропускність T – частка світла, що проходить крізь об'єм без поглинання та розсіювання. Для неоднорідного середовища з коефіцієнтом екстинкції $\sigma(t)$, оптична пропускність описується формулою:

$$T(x_0, x_1) = exp(-\int_{x_0}^{x_1} \sigma(t)\ dt), \quad (10)$$

де $\sigma(t)$ характеризує питому інтенсивність поглинання та розсіювання світла на одиницю довжини шляху. Формула (10) – це визначений інтеграл від коефіцієнта екстинкції вздовж відрізка $[x_0, x_1]$, який обчислюється послідовним інтегруванням вздовж кожного променя у тривимірному просторі сцени з рівномірним або адаптивним кроком.

Повна модель освітлення об'єму поєднує пропускність (10) з інтегралом розсіяного світла вздовж шляху. Як зазначають Fong та ін. [6], результуюча радіансність вздовж променя від x_0 до x_1 є:

$$L(x^0) = T(x^0, x^1) \cdot L(x^1) + \int_{x_0}^{x_1} T(x^0, t)\, \sigma_s(t) L_s(t)\, dt, \quad (11)$$

де $\sigma_s(t)$ – коефіцієнт розсіювання, $L_s(t)$ – радіансність розсіяного у точці t світла. Інтеграл (11) у виробничих рендерерах обчислюється тим самим методом Монте-Карло (2), що і рівняння рендерингу (1) [6], а обидва інтеграли розв'язуються в єдиному алгоритмі трасування шляхів.

Висновки

Проведений аналіз джерел показав, що диференціальні рівняння та інтегральне числення є невід'ємним математичним апаратом комп'ютерної графіки. Рівняння рендерингу Kajiya [4] є інтегральним рівнянням перенесення світла, стохастичне наближення якого методом Монте-Карло [2] визначає принцип роботи сучасних алгоритмів трасування шляхів в іграх. Рух фізичних об'єктів описується системою диференціальних рівнянь (3), що розв'язується методом Рунге-Кутта четвертого порядку (4)–(8) [3]. Симуляція деформованих об'єктів за масово-пружинною моделлю [5] також зводиться до системи диференціальних рівнянь другого порядку для кожного вузла. Об'ємний рендеринг хмар та диму ґрунтується на інтегралі оптичної пропускності (10) та інтегралі освітлення (11) [6], які обчислюються методом кроків (ray marching) і Монте-Карло.

Таким чином, перераховані математичні моделі охоплюють ключові підсистеми будь-якого сучасного графічного рушія: систему рендерингу, фізичну симуляцію та спеціальні ефекти. Фундаментальні знання з математики є необхідною умовою для розроблення фізично коректних та ефективних алгоритмів комп'ютерної графіки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Marschner S., Shirley P. Fundamentals of Computer Graphics. – 4th ed. – Boca Raton : A K Peters/CRC Press, 2015. – 752 p.
2. Pharr M., Jakob W., Humphreys G. Physically Based Rendering: From Theory to Implementation. – 4th ed. – Cambridge : The MIT Press, 2023. – 1312 p.
3. Catto E. Numerical Methods [Електронний ресурс] // *Physics for Game Programmers: GDC 2015 Tutorial*. – San Francisco: Game Developers Conference, 2015. – Режим доступу: https://box2d.org/files/ErinCatto_NumericalMethods_GDC2015.pdf (дата звернення: 01.06.2026).
4. Kajiya J. T. The rendering equation // *Proceedings of the 13th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '86)*. – New York : ACM Press, 1986. – P. 143–150. – DOI: 10.1145/15922.15902.
5. Nealen A., Müller M., Keiser R., Boxerman E., Carlson M. Physically Based Deformable Models in Computer Graphics // *Computer Graphics Forum*. – 2006. – Vol. 25, № 4. – P. 809–836. – DOI: 10.1111/j.1467-8659.2006.01000.x.
6. Fong J., Wrenninge M., Kulla C., Habel R. Production volume rendering // *ACM SIGGRAPH 2017 Courses*. – New York : ACM Press, 2017. – Art. 2. – P. 1–79. – DOI: 10.1145/3084873.3084907.

Руденко Даниіл Костянтинович − студент групи 2ПІ-25Б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: twnckc@gmail.com.

Науковий керівник: ***Прозор Олена Петрівна*** − к.пед.н., доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, email: prozor@vntu.edu.ua.

Rudenko Danyil K. − student, group 2PI-25B, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: twnckc@gmail.com.

Scientific supervisor: ***Prozor Olena P.*** − PhD (in Pedagogical Sciences), Docent, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: prozor@vntu.edu.ua.