

# АПРОКСИМАЦІЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ

Вінницький національний технічний університет

## Анотація

У статті досліджуються математичні методи апроксимації функцій та їх практичне застосування для аналізу електричних кіл. Розглянуто теоретичні засади методу найменших квадратів, інтерполяційних багаточленів та кусково-лінійної апроксимації. Особливу увагу приділено застосуванню лінійної інтерполяції для визначення проміжних значень напруги в колах змінного струму. Наведено детальний практичний розрахунок параметрів моделі на основі дискретних вимірів, що дозволяє оптимізувати процес проектування вбудованих систем та систем електропостачання.

**Ключові слова:** апроксимація, інтерполяція, метод найменших квадратів, електричні кола, напруга, математичне моделювання.

## Abstract

The article explores mathematical methods of function approximation and their practical application for the analysis of electrical circuits. The theoretical foundations of the least squares method, interpolation polynomials, and piecewise linear approximation are considered. Special attention is paid to the use of linear interpolation to determine intermediate voltage values in alternating current circuits. A detailed practical calculation of model parameters based on discrete measurements is presented, which allows optimizing the design process of embedded systems and power supply systems.

**Keywords:** approximation, interpolation, least squares method, electrical circuits, voltage, mathematical modeling.

## Вступ

Сучасний розвиток інформаційних технологій та вбудованих систем вимагає точного математичного опису фізичних процесів. Під час розробки програмного забезпечення для мікроконтролерів (зокрема архітектури AVR), проектування електричних мереж або моделювання в середовищах типу Proteus VSM інженери постійно стикаються з проблемою обробки дискретних масивів даних. Аналогово-цифрові перетворювачі (АЦП) фіксують значення неперервних сигналів лише у визначені моменти часу, формуючи дискретну вибірку. Наприклад, при дослідженні лінійних кіл однофазного синусоїдального струму виникає задача відновлення повної картини зміни напруги чи струму за обмеженою кількістю вимірів. Саме тому застосування математичного апарату апроксимації є критично важливим етапом у цифровій обробці сигналів [1].

Необхідність знаходження проміжних значень функцій між існуючими точками або згладжування експериментальних даних, обтяжених похибками вимірювань, зумовлює актуальність глибокого вивчення та вдосконалення методів апроксимації. Незважаючи на існування потужних обчислювальних комплексів, розуміння базових принципів лінійної та нелінійної інтерполяції залишається фундаментом для створення оптимізованого та швидкодіючого мікропроцесорного коду [2].

## Результати дослідження

Апроксимація — це математичний метод заміни одних математичних об'єктів іншими, ближчими до вихідних за певними критеріями, з метою їх спрощення або дослідження. В обчислювальній математиці найчастіше розглядається апроксимація функцій, коли складну функцію  $f(t)$ , задану аналітично або таблично, замінюють простішою функцією  $g(t)$  [3].

Існує два основних класи задач наближення: інтерполяція та наближення функцій у середньому (або метод найменших квадратів). Якщо функція задана дискретним набором точок  $(t_i, U_i)$ , де  $i = 0, 1, \dots, n$ , інтерполяція

вимагає, щоб наближуюча функція проходила точно через усі задані вузли, тобто виконувалась умова  $g(t_i) = u_i$ . Натомість, метод найменших квадратів використовується тоді, коли експериментальні дані містять шум, і точний збіг у вузлах не є обов'язковим. У цьому випадку мінімізується сума квадратів відхилень:

$$S = \sum (U_i - g(t_i))^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

Одним із найпоширеніших методів є поліноміальна інтерполяція, яка використовує багаточлени Лагранжа та Н'ютона. Для множини з  $n+1$  точок завжди можна побудувати єдиний поліном степеня  $n$ , що проходить через усі ці точки. Однак, при великій кількості точок використання поліномів високих степенів призводить до явища Рунге — значних осциляцій на краях інтервалу. Для уникнення цієї проблеми використовують сплайн-апроксимацію, зокрема кубічні сплайни, або шматково-лінійну апроксимацію.

Шматково-лінійна апроксимація є найпростішим і найбільш стійким методом для інженерних застосувань, особливо в системах реального часу. Функція на кожному малому інтервалі  $[t_i, t_{i+1}]$  замінюється відрізком прямої лінії. Рівняння такої прямої має вигляд:

$$U = A_0 + A_1 t. \quad (2)$$

Зауважимо, що у класичній електротехніці миттєві значення напруги часто позначають як функцію від часу  $u(t)$ . Проте, для оптимізації математичних записів та уникнення перевантаження формул, у даному випадку ми просто замінимо  $u(t)$  на  $U$ , що є загальноприйнятою практикою у чисельних методах.

Розглянемо практичний приклад. Під час виконання лабораторних досліджень простих кіл змінного струму було зафіксовано два дискретних значення напруги у моменти часу  $t_1$  та  $t_2$ . Виникла необхідність знайти миттєве значення напруги  $U_x$  у проміжний момент часу  $t_x$ . Вихідні дані для розрахунку наведено у таблиці 1.

Таблиця 1 Вихідні дані для лінійної апроксимації напруги

Параметр	Позначення	Значення
Час першого виміру	$t_1$	0,0003 с
Напруга першого виміру	$U_1$	2,8 В
Час другого виміру	$t_2$	0,00066 с
Напруга другого виміру	$U_2$	5,3 В
Час шуканого виміру	$t_x$	0,00042 с

Для знаходження невідомих коефіцієнтів  $A_0$  та  $A_1$  складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, підставивши відомі координати точок у загальне рівняння прямої:

$$\begin{aligned} U_1 &= A_0 + A_1 t_1 \\ U_2 &= A_0 + A_1 t_2 \end{aligned}$$

Підставляючи числові значення з таблиці 1, отримаємо:

$$\begin{aligned} 2,8 &= A_0 + A_1 \cdot 0,0003 \\ 5,3 &= A_0 + A_1 \cdot 0,00066 \end{aligned}$$

Віднімемо перше рівняння від другого, щоб знайти кутовий коефіцієнт  $A_1$ , який фізично відображає швидкість зміни напруги у вольтах за секунду на даному інтервалі:

$$\begin{aligned} 5,3 - 2,8 &= A_1 \cdot 0,00066 - A_1 \cdot 0,0003 \\ 2,5 &= A_1 \cdot (0,00066 - 0,0003) \\ 2,5 &= 0,00036 \cdot A_1 \end{aligned}$$

$$A_1 = 2,5 / 0,00036 \approx 6944,4$$

Тепер підставимо знайдене значення  $A_1$  у перше рівняння для обчислення вільного члена  $A_0$ :

$$2,8 = A_0 + 6944,4 \cdot 0,0003$$

$$2,8 = A_0 + 2,083$$

$$A_0 = 2,8 - 2,083 = 0,717$$

Отже, апроксимуюче рівняння для даного відрізка має вигляд:  $U = 0,717 + 6944,4 \cdot t$ . Використовуючи це рівняння, розрахуємо шукане значення напруги  $U_x$  у момент часу  $t_x = 0,00042$  с:

$$U_x = 0,717 + 6944,4 \cdot 0,00042 = 0,717 + 2,917 = 3,634 \text{ В.}$$

Графічна інтерпретація отриманих результатів зображена на рис. 1. Точки А та В відповідають експериментальним вимірам, а точка  $x$  — обчисленому проміжному значенню.

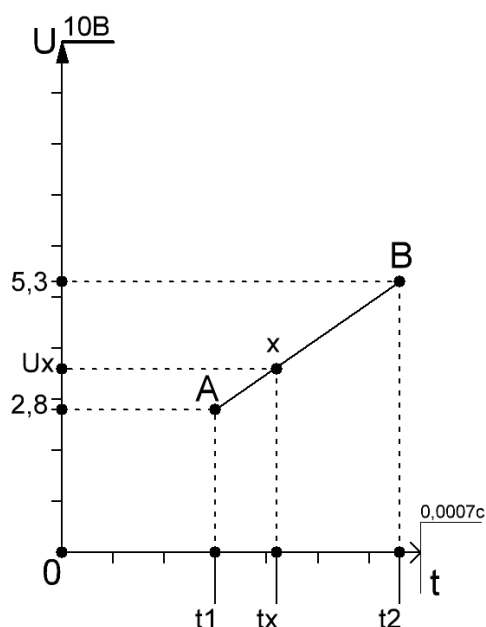


Рисунок 1 Лінійна апроксимація залежності напруги від часу

Описаний алгоритм відрізняється низькою обчислювальною складністю, оскільки потребує лише базових арифметичних операцій (множення, додавання та віднімання). Це робить його ідеальним для реалізації на рівні мікроконтролерів у вбудованих системах управління живленням та релейного захисту. Незважаючи на свою простоту, при достатньо високій частоті дискретизації кусково-лінійна апроксимація забезпечує точність, яка повністю задовольняє вимоги інженерних стандартів.

Також слід відзначити, що подібний підхід є базисом для побудови складніших алгоритмів цифрової обробки сигналів, таких як розрахунок діючого значення (RMS) напруги, спектральний аналіз (швидке перетворення Фур'є) та обчислення балансу потужностей у трифазних системах.

### Висновки

В результаті проведеного дослідження розглянуто ключові аспекти теорії апроксимації функцій та доведено доцільність застосування кусково-лінійної інтерполяції для обробки сигналів в електричних колах. Детальний математичний розрахунок підтвердив, що за допомогою системи лінійних рівнянь можна з високою точністю

визначати параметри моделі та знаходити проміжні значення напруги. Отримані результати можуть бути використані під час проектування апаратних комплексів, а також при обробці результатів лабораторних вимірювань і створенні алгоритмів для мікропроцесорних систем контролю параметрів мережі.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кветний, Р. Н. Моделирование та оптимізація систем і процесів. Комп'ютерні методи : навчальний посібник / Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко, О. Ю. Софіна, О. М. Шушура. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 144 с.
2. Самарський, О. А. Вступ до чисельних методів: Навчальний посібник / О. А. Самарський. - Київ: Наукова думка, 2019. - 288 с.
3. Кухарчук, В. В. Теоретичні основи електротехніки: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник. Ч. 1 / В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький, С. Ш. Каців. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.

**Шумко Євгеній Русланович** — студент групи ЕМСА-256, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, [shumkoevgeniy23@gmail.com](mailto:shumkoevgeniy23@gmail.com)

**Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна** - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)

Науковий керівник: **Сачанюк – Кавецька Наталія Василівна**, кандидат технічних наук, доцент, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

**Shumko Yevheniy R.**, Student of the Faculty of Electrical Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, [shumkoevgeniy23@gmail.com](mailto:shumkoevgeniy23@gmail.com)

**Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.** Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)

Supervisor: **Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)