

ПРО МАТЕМАТИЧНУ МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

¹Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Анотація

Розроблено математичну модель, що описує динаміку формування компетентностей здобувачів освіти в процесі навчання. У моделі враховано п'ять рівнів сформованості компетентностей та змодельовано як переходи до вищих рівнів, так і можливі регресивні зміни з урахуванням контактних і безконтактних способів взаємодії. У результаті отримано систему нелінійних диференціальних рівнянь, яка характеризує часову динаміку відповідних груп здобувачів освіти.

Ключові слова: математична модель, формування компетентностей, епідеміологічні моделі, компартментні моделі.

Abstract

A mathematical model describing the dynamics of competence formation among students in the learning process has been developed. The model takes into account five levels of competence development and describes both progressive and regressive transitions between them, considering contact and non-contact mechanisms of interaction. As a result, a system of nonlinear differential equations was obtained to characterize the temporal evolution of the corresponding groups of students.

Keywords: mathematical model, competence formation, epidemiological models, compartmental models.

Останнім часом зростає інтерес до використання математичного моделювання для дослідження освітніх процесів ([5, 6, 8, 11, 13]). Важливе місце серед таких підходів займають епідеміологічні та компартментні моделі ([4, 7, 9]), які дають змогу описувати динаміку поширення знань, мотивації та навчальної поведінки студентів. Їх теоретичною основою стали класичні праці з математичної біології та епідеміології ([10, 14]), де популяція поділяється на групи, а переходи між ними описуються системами диференціальних рівнянь.

У сучасних дослідженнях ці підходи адаптуються до освітньої сфери. Зокрема, у роботах [6, 11] побудовано моделі навчальної поведінки студентів на основі аналогії з класичною SIR-моделлю, запропонованою В. Кермаком і А. Маккендріком у 1927 році ([10]). Показано, що соціальна взаємодія, мотивація та інтенсивність навчального впливу істотно впливають на переходи між рівнями навчальної активності.

Разом із тим існуючі моделі переважно орієнтовані на загальні характеристики навчальної поведінки й недостатньо враховують специфіку формування компетентностей. На відміну від них, у цій роботі компартментний підхід адаптовано до рівнів сформованості компетентностей із урахуванням як прогресивних, так і регресивних переходів, пов'язаних із можливою втратою компетентностей у процесі навчання. Це дозволяє більш адекватно описати реальну динаміку освітнього процесу.

Існує значна кількість досліджень, присвячених розробці педагогічних моделей формування різних компетентностей фахівців певних галузей. Зокрема, у роботі [1] запропоновано педагогічну модель формування практичних умінь роботи з видавничою системою LaTeX у майбутніх бакалаврів математики, що базується на поетапному розвитку мотивації, практичної діяльності та рефлексії. У статті [3] представлено модель формування енергоефективної компетентності майбутніх кваліфікованих працівників будівельної галузі, яка охоплює цільовий, методологічний, змістовий, навчально-модельований і результативно-оцінювальний компоненти. У роботі [12] розроблено педагогічну модель формування професійних компетентностей юриста на основі діяльнісного підходу.

Водночас зазначені моделі не враховують часову динаміку переходів між рівнями сформованості компетентностей. Тому актуальною є задача математичної формалізації динаміки формування компетентностей у процесі навчання з урахуванням прогресивних і регресивних переходів між рівнями їх сформованості на основі аналогій із компартментними та епідеміологічними моделями.

Розглянемо деяку педагогічну модель формування певних компетентностей здобувачів освіти у процесі навчання. В цій моделі визначимо чотири рівні сформованості компетентностей: низький (початковий), середній (репродуктивний), достатній (конструктивний) і високий (творчий).

У межах цього дослідження проводиться аналогія між процесами поширення інфекції чи інформації та формуванням компетентностей у навчальному середовищі. У компартментних моделях популяцію поділяють на окремі групи, між якими відбуваються переходи з певною інтенсивністю. Подібним чином у процесі навчання здобувачі освіти можуть належати до різних рівнів сформованості компетентностей і переходити між ними під впливом навчальних, мотиваційних та соціальних факторів. Зауважимо, що процес формування компетентностей є поетапним і неоднорідним. Це зумовлює доцільність виділення кількох компартментів.

Позначимо через $N(t)$ – кількість здобувачів освіти у момент часу $t \geq 0$, які проходять навчання відповідно до даної педагогічної моделі. Нехай $E(t)$ – кількість здобувачів, які перебувають на етапі первинної мотивації та ознайомлення з навчальним матеріалом, фактично не володіють відповідними компетентностями; $L(t)$ – кількість здобувачів з низьким рівнем сформованості компетентностей; $M(t)$ – з середнім рівнем; $S(t)$ – з достатнім рівнем; $H(t)$ – з високим рівнем. Вважається, що в процесі навчання здобувачі поступово переходять від нижчих рівнів сформованості компетентностей до вищих. З урахуванням підходів, запропонованих у [6], вважаємо, що швидкість переходу здобувачів між рівнями підготовки залежить не лише від їх поточного стану, а й від взаємодії з більш підготовленими здобувачами. Така взаємодія відображає ефекти колективного навчання, консультацій, наставництва та спільної роботи. Відповідно введемо такі додаткові параметри: Λ – інтенсивність вхідного потоку здобувачів освіти, які розпочинають навчання відповідно до педагогічної моделі (кількість осіб за одиницю часу); α – коефіцієнт інтенсивності контактного переходу здобувачів освіти з вхідного рівня E до низького рівня (цей коефіцієнт є аналогом коефіцієнта зараження в SIR-моделях); β – коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з вхідного рівня до середнього; γ_1 – коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу з низького рівня до середнього; γ_2 – коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з середнього рівня до низького; δ_1 – коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з середнього рівня до достатнього; δ_2 – коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з середнього рівня до високого; δ_3 – коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з достатнього рівня до середнього; θ_1 – коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з достатнього рівня до високого; θ_2 – коефіцієнт інтенсивності безконтактного переходу здобувачів освіти з високого рівня до достатнього; σ – коефіцієнт інтенсивності вибуття здобувачів освіти з навчального процесу на будь-якому етапі.

Тоді динаміка формування компетентностей відповідно до визначених рівнів описується системою диференціальних рівнянь ([2]):

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \Lambda - \alpha EL - (\beta + \sigma)E, \\ \frac{dL}{dt} = \alpha EL + \gamma_2 M - (\gamma_1 + \sigma)L, \\ \frac{dM}{dt} = \beta E + \gamma_1 L + \delta_3 S - (\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \sigma)M, \\ \frac{dS}{dt} = \delta_1 M + \theta_2 H - (\delta_3 + \theta_1 + \sigma)S, \\ \frac{dH}{dt} = \delta_2 M + \theta_1 S - (\theta_2 + \sigma)H. \end{cases} \quad (1)$$

У результаті проведеного аналізу встановлено, що сумарна чисельність здобувачів освіти є обмеженою функцією часу, що забезпечує коректність моделі з точки зору прикладної інтерпретації. Показано, що для будь-яких невід'ємних початкових даних задача Коші для системи (1) має єдиний обмежений розв'язок. Отже, запропонована модель може слугувати основою для подальших досліджень.

джені, зокрема для аналізу стійкості станів рівноваги, вивчення впливу параметрів системи та постановки задач оптимального керування освітнім процесом.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бак С., Ковтонюк Г. Модель формування практичних вмінь і навичок роботи з видавничою системою LaTeX у майбутніх бакалаврів математики. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта*. 2025. Т. 2, № 2. С. 262-271. DOI: <https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-10>
2. Бак С., Ковтонюк Г. Побудова та аналіз математичної моделі динаміки формування компетентностей у процесі навчання. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта*. 2026. Т. 3, № 1. С. 11-21. DOI: <https://doi.org/10.31652/3041-1955-2026-03-01-02>
3. Каленський А. Педагогічне моделювання формування енергоефективної компетентності майбутніх кваліфікованих робітників будівельної галузі. *Вісник Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка*. Серія: Педагогічні науки. 2025. Том 3, № 59. С. 10-19. DOI: <https://doi.org/10.31376/2410-0897-2025-3-59-10-19>
4. Марценюк В. П., Сверстюк А. С. Математичні моделі та методи компартментного моделювання кіберфізичних систем медико-біологічних процесів: монографія. Львів: Видавництво «Магнолія – 2006», 2020. 400 с.
5. Chorny O. P., Herasymenko L. V., Busher V. V. The learning process simulation based on differential equations of fractional orders. *CTE Workshop Proceedings* [Online]. 2021. Vol. 8. P. 473-483. DOI: <https://doi.org/10.55056/cte.301>
6. El Bhih A., Benfatah Y., Hassouni H., Balatif O., Rachik M. Mathematical modeling, sensitivity analysis, and optimal control of students awareness in mathematics education. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*. 2024. Vol. 11. P. 1-12. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100795>
7. Funk S., Gilad E., Watkins C., Jansen V. A. A. The spread of awareness and its impact on epidemic outbreaks. *PNAS*. 2009. Vol. 106. P. 6872-6877. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.0810762106>
8. He Z., Wang H., Hu Y., Zhao H. Dynamic analysis and optimal control of knowledge diffusion model in regional innovation ecosystem under digitalization. *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14, 13124. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-63634-3>
9. Hethcote H. W. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*. 2000. Vol. 42. P. 599-653. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0036144500371907>
10. Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society A*. 1927. Vol. 115, issue 772. P. 700-721. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
11. Kishore R., Kumar D. Epidemic modeling of student learning behavior: a novel perspective. *International Journal of Mathematics and Computer Research*. 2025. Vol. 13, issue 3. P. 4943-4950. DOI: <https://doi.org/10.47191/ijmcr/v13i3.06>
12. Kostruba A. Pedagogical model of the formation of professional competences of lawyers: Ukrainian reality. *Law Review of Kyiv University of Law*. 2020. No. 2. P. 31-36. DOI: <https://doi.org/10.36695/2219-5521.2.2020.04>
13. Lewis D. Modeling student engagement using optimal control theory. *Journal of Geometric Mechanics*. 2022. Vol. 14, issue 1. P. 131-150. DOI: <https://doi.org/10.3934/jgm.2021032>
14. Murray J. D. *Mathematical Biology I: An Introduction*. New York: Springer, 2002. 551 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/b98868>

Бак Сергій Миколайович — докт. фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, sergiy.bak@gmail.com

Бак Сергій М. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, sergiy.bak@gmail.com

Ковтонюк Галина Миколаївна — канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, galyna.kovtonyuk@gmail.com

Kovtoniuk Halyna M. — Cand. Sc. (Ped.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, galyna.kovtonyuk@gmail.com