

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОЗМІННИХ РЯДІВ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У статті запропоновано підхід до комп'ютерного моделювання процесу дослідження збіжності знакозмінних рядів із використанням алгоритмічних методів обчислення та візуалізації результатів. Проведено аналіз основних критеріїв збіжності числових рядів, зокрема ознаки Лейбніца, абсолютної та умовної збіжності.

Ключові слова: знакозмінні ряди, вища математика, комп'ютерне моделювання.

Abstract

The article proposes an approach to computer modeling of the process of studying the convergence of alternating series using algorithmic methods of calculation and visualization of results. The main criteria for the convergence of numerical series are analyzed, in particular the Leibniz sign, absolute and conditional convergence.

Key words: alternating series, higher mathematics, computer modeling.

Вступ

Знакозмінні ряди є важливим інструментом у чисельному аналізі, математичному моделюванні та інженерних обчисленнях, оскільки дозволяють наближено представляти складні функції та процеси. Коректність використання таких рядів безпосередньо залежить від їх збіжності, порушення якої може призводити до значних похибок у розрахунках та некоректних результатів моделювання.

Використання комп'ютерних програм, зокрема на мові Python, дає змогу автоматизувати перевірку збіжності рядів за критерієм Лейбніца та дозволяє досліджувати поведінку часткових сум для різних значень аргументу. Використання комп'ютерного моделювання забезпечує точність, ефективність та наочність результатів, що робить програму корисною для прикладних задач у техніці, обчислювальній математиці та навчально-практичних дослідженнях.

Результати дослідження

У межах роботи програми здійснюється визначення типу знакозмінного ряду, перевірка збіжності при заданих значеннях аргументу та аналіз поведінки часткових сум ряду.

Програма реалізує наступні можливості:

1. Визначення типу знакозмінного ряду та обчислення його членів a_n .
2. Перевірку умови знакопосередності.
3. Перевірку умови монотонного спадання: $|a_n| \geq |a_{n+1}|$.
4. Перевірку граничної умови: $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.
5. Визначення збіжності ряду на основі виконання всіх умов ознаки Лейбніца.

Програма складається з таких логічних модулів:

1. Модуль введення даних. Задання коефіцієнтів знакопосередного ряду, кількості членів для обчислень та діапазону значень змінної. Містить Функції Генерації Загального Члена Ряду: `calculate_term(n, series_type, p=2)` приймає ряд з виразом загального члена ряду

2. Модуль аналітичного аналізу. Перевірка критеріїв збіжності ряду за ознакою Лейбніца. Функції Перевірки Умов Збіжності

1. `check_alternating(terms)` - перевіряє знакопослідовність ряду.
2. `check_monotone_decreasing(terms)` - обчислює монотонне спадання $|a_n|$.
3. `check_limit_zero(terms, epsilon=0.001)` - перевіряє граничний перехід $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

3. Модуль аналізу збіжності. Перевіряє знакопослідовність ряду.

Функція Аналізу Збіжності

`leibniz_test(series_type, n, p=2)` - головна функція аналізу збіжності ряду

4. Модуль чисельного моделювання. Обчислення часткових сум ряду та дослідження їх поведінки при різних значеннях аргументу.

Функції Обчислення Часткових Сум та Похибки

1. `calculate_partial_sums(terms)` - обчислення часткових сум ряду

2. `estimate_error(terms, series_type, p=2)` - оцінка похибки за ознакою Лейбніца (Функція обчислює наступний член та повертає його модуль як оцінку похибки).

Наприклад, для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

```

-----
ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ
-----
Часткова сума S_64 = 0.8223468700
Оцінка похибки |R_n| ≤ |a_65| = 2.3668639053e-04
Інтервал суми: [0.8221101836, 0.8225835564]

-----
n      a_n      |a_n|      S_n
-----
1      1.0000000000  1.0000000000  1.0000000000
2      -0.2500000000  0.2500000000  0.7500000000
3      0.1111111111  0.1111111111  0.8611111111
4      -0.0625000000  0.0625000000  0.7986111111
5      0.0400000000  0.0400000000  0.8386111111
6      -0.0277777778  0.0277777778  0.8108333333
7      0.0204081633  0.0204081633  0.8312414966
8      -0.0156250000  0.0156250000  0.8156164966
9      0.0123456790  0.0123456790  0.8279621756
10     -0.0100000000  0.0100000000  0.8179621756

-----
Результат перевірки: ЗБІГАЄТЬСЯ
-----

```

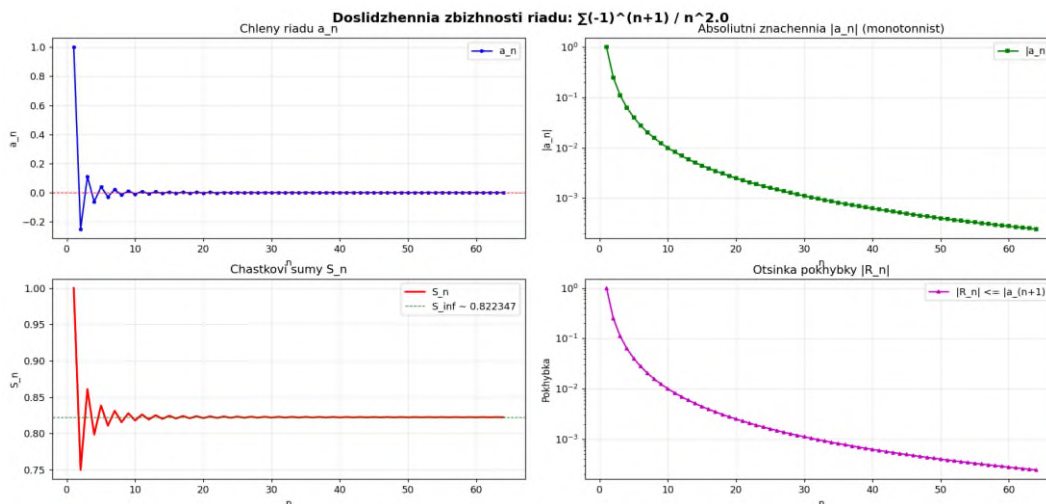
5. Модуль перевірки збіжності та точності. Автоматична оцінка збіжності ряду, похибки та швидкості збіжності для заданих умов.

6. Модуль виведення результатів. Формування графіків і підсумкових висновків для прикладних обчислень. Функція Візуалізації `plot_results(terms, abs_terms, partial_sums, series_name)` – буде графічне представлення результатів.

Створює 4 графіки:

1. Члени ряду a_n – показує як змінюються члени ряду.
2. Абсолютні значення $|a_n|$ – демонструє монотонність.
3. Часткові суми S_n – показує наближення до суми ряду.
4. Оцінка похибки $|R_n|$ – залишковий член.

Наприклад, для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$



Як можна бачити, в даній програмі виводиться вся інформація яка потрібна при моделюванні збіжності знакзмінних числових рядів за ознакою Лейбніца.

Висновки

Розроблена програма реалізує автоматизовану перевірку збіжності рядів за ознакою Лейбніца та дозволяє досліджувати поведінку часткових сум для різних значень аргументу. Використання комп'ютерного моделювання забезпечує точність, ефективність та наочність результатів, що робить програму корисною для прикладних задач у техніці, обчислювальній математиці та навчально-практичних дослідженнях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Хом'юк, І. В., Хом'юк, В. В. (2017). Математичне моделювання в контексті здійснення міжпредметних зв'язків курсу вищої математики у ВНЗ. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Суми: Сумський держ. педагогічний університет ім. А. С. Макаренка. 2(10), 43–50.
2. Хом'юк, І. В., Кирилашук, С. А., Хом'юк, В. В. (2022). Застосування інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання вищої математики у технічних ЗВО. Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія: Педагогіка і психологія, 69, 38-45.
3. Хом'юк, І. В., Кирилашук, С. А., Хом'юк, В. В. (2026). Використання комп'ютерного моделювання в процесі вивчення вищої математики майбутніми фахівцями ІТ-спеціальностей / І. В. Хом'юк, С.А.Кирилашук, В.В.Хом'юк //Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». – Суми : Сумський держ. педагогічний університет ім. А. С. Макаренка, 2026. Вип. 1(26). 156–163.

Хом'юк Ірина Володимирівна – д. пед. н., професор, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vikiraivh@gmail.com

Кирилашук Світлана Анатоліївна – к. пед. н., доцент, декан факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: : ksa07750@gmail.com

Khomyuk Irina V. – Doctor of Science (Ped.), Professor of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vikiraivh@gmail.com

Kyrylashchuk S. A. – Associate Professor the department of Higher mathematics Dean of the Information Technology and Computer Engineering Department Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine, e-mail: ksa07750@gmail.com