

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У статті розглянуто програмний продукт для математичного моделювання та аналізу особливих точок у системах автоматичного керування. Запропоновано підхід до дослідження динамічних властивостей систем на основі побудови математичних моделей і аналізу фазових траєкторій. Реалізовано алгоритми визначення та класифікації особливих точок, що дозволяють оцінювати стійкість і характер поведінки систем у різних режимах функціонування.

Ключові слова: математичне моделювання, системи автоматичного керування, особливі точки.

Abstract

The article considers a software product for mathematical modeling and analysis of singular points in automatic control systems. An approach to studying the dynamic properties of systems based on the construction of mathematical models and analysis of phase trajectories is proposed. Algorithms for determining and classifying singular points are implemented, which allow assessing the stability and behavior of systems in different operating modes.

Keywords: mathematical modeling, automatic control systems, singular points

Вступ

Сучасний розвиток інженерних систем характеризується широким упровадженням систем автоматичного керування в різних галузях техніки – від енергетики та промислової автоматики до робототехніки. Ефективність функціонування таких систем значною мірою визначається їхніми динамічними властивостями, зокрема стійкістю, швидкодією та якістю перехідних процесів. Для аналізу й синтезу систем автоматичного керування важливу роль відіграють математичні методи [1-3], що дозволяють формалізувати поведінку систем у різних режимах роботи.

Результати дослідження

Одним із фундаментальних інструментів дослідження систем автоматичного керування є теорія функцій комплексної змінної [4]. У межах цього підходу передатні функції систем розглядаються як комплексні функції, властивості яких визначаються особливими точками – полюсами та нулями. Розташування та характер цих точок у комплексній площині безпосередньо впливають на стійкість системи, наявність коливальних режимів і характер перехідних процесів.

Функціональне призначення комп'ютерного моделювання полягає у визначенні та класифікації особливих точок функцій комплексної змінної, що виникають у передатних функціях і характеристичних рівняннях систем автоматичного керування. Зокрема, програма дозволяє ідентифікувати полюси та нулі системи, визначати їх характер (усувні особливі точки, полюси скінченного порядку, істотно особливі точки), а також аналізувати їх вплив на стійкість і динамічні властивості системи. Програмний засіб реалізований на мові Python і орієнтований на використання в задачах обчислювальної математики та технічного моделювання.

У процесі роботи програма застосовує обчислення границь, розклад функцій у ряд Лорана та аналітичні перетворення комплексних функцій. Це дає змогу формалізувати поведінку системи поблизу особливих точок і зробити висновки щодо її стійкості, коливальних режимів та перехідних процесів.

Запропонована комп'ютерна програма призначена для визначення особливих точок функції комплексної змінної або передатної функції системи автоматичного керування. Класифікація точок здійснюється двома методами.

Програма реалізує наступні можливості:

1. Пошук особливих точок функції:

- аналізує знаменник функції;
- визначає всі корені, які є особливими точками.

2. Класифікація особливих точок:

- для кожної знайденої точки обчислюється границя функції;
- проводиться класифікація за типами: усувна, полюс (з визначенням порядку), суттєво особлива.

3. Аналіз ряду Лорана:

- якщо границя не існує або не є однозначною, програма розкладає функцію в ряд Лорана в околі цієї точки;
- якщо у головній частині ряду нескінченно багато членів – це суттєво особлива точка.

Структура програми:

Програма складається з таких логічних модулів:

1. Модуль введення даних. Забезпечує введення аналітичного виразу функції комплексної змінної або передатної функції системи автоматичного керування, а також задання параметрів дослідження (область аналізу, точність обчислень, наприклад, $\exp(z^{**2}) / (z^{**2} - 6*z)$, $\sin(z) / (2*z)$, z^{**2}):"

2. Обчислювальний модуль. Реалізує алгоритми обчислення границь, розкладу функцій у ряд Лорана та аналітичного визначення особливих точок. Модуль здійснює класифікацію особливих точок (усувні, полюси різного порядку, істотно особливі точки).

```
lim_val = limit(f, z, z0)
if lim_val.is_finite:
    return f"Усувна особлива точка (границя: {lim_val})"
elif lim_val == oo or lim_val == -oo:
    for n in range(1, 10):
        lim_n = limit((z - z0)**n * f, z, z0)
        if lim_n.is_finite and lim_n != 0:
            return f"Полюс порядку {n} (границя: {lim_n})"
    return "Полюс (невизначений порядок)"
```

3. Модуль аналізу систем автоматичного керування. Виконує інтерпретацію знайдених особливих точок у контексті теорії автоматичного керування, зокрема визначає вплив полюсів і нулів на стійкість та динамічні характеристики системи.

4. Модуль візуалізації результатів. Забезпечує побудову графіків розташування особливих точок у комплексній площині, а також відображення результатів у табличному вигляді. Забезпечує структурований вивід фінальних результатів.

Функція Візуалізації

`plot_results(terms, abs_terms, partial_sums, series_name)` – буде графічне представлення результатів, вхідні та вихідні дані

Висновки

Розроблене програмне забезпечення дозволяє автоматизувати процес побудови математичних моделей, виконувати обчислення параметрів системи та візуалізувати результати аналізу. Це значно спрощує проведення досліджень і підвищує точність отриманих результатів порівняно з ручними розрахунками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Хом'юк, І. В. Хом'юк, В. В. (2017). Математичне моделювання в контексті здійснення міжпредметних зв'язків курсу вищої математики у ВНЗ. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Суми: Сумський держ. педагогічний університет ім. А. С. Макаренка. 2(10), 43–50.

2. Хом'юк, І. В., Кирилашук, С. А., Хом'юк, В. В. (2022). Застосування інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання вищої математики у технічних ЗВО. Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія: Педагогіка і психологія, 69, 38-45.
3. Хом'юк, І. В., Кирилашук, С. А., Хом'юк, В. В. (2026). Використання комп'ютерного моделювання в процесі вивчення вищої математики майбутніми фахівцями ІТ-спеціальностей / І. В. Хом'юк, С.А.Кирилашук, В.В.Хом'юк //Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». – Суми : Сумський держ. педагогічний університет ім. А. С. Макаренка, 2026. Вип. 1(26). 156–163.
4. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою) Частина 2 : навчальний посібник / Хом'юк І. В. , Сачанюк-Кавецька Н.В., В. В. Хом'юк, Ковальчук М. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 148 с.

Хом'юк Віктор Вікторович – к.т.н., доцент, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vikiravvh@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна – к.т.н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Khomyuk V. V. – Associate Professor the department of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vikiravvh@gmail.com

Sachanyuk-Kavetska Natalia V. – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com