УДК 517.9:004.42

М. М. Тодер

Н. Б. Дубова

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ ТА ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ФРОБЕНІУСА МОВОЮ C++

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено метод Фробеніуса для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з регулярними особливими точками та його реалізацію мовою C++. Особливу увагу приділено алгоритмізації пошуку коренів індексного рівняння та автоматизації побудови розв'язків у вигляді узагальнених степеневих рядів. Розроблена програма забезпечує інтеграцію з табличними процесорами для візуалізації результатів, що дозволяє ефективно аналізувати поведінку математичних моделей.

Ключові слова: *метод Фробеніуса, особлива точка, індексне рівняння, степеневі ряди, C++, Excel-автоматизація..*

Abstract

The purpose of this work is to study the Frobenius method for solving second-order linear differential equations with regular singular points and its implementation in the C++ programming language. The program allows calculating the indices of the indicial equation, finding the coefficients of the generalized power series, and visualizing the resulting solution. The work demonstrates the use of object-oriented programming to automate complex mathematical calculations.

Keywords: *Frobenius method, singular point, indicial equation, power series, C++, mathematical modeling.*

Вступ

Аналіз динамічних систем часто призводить до диференціальних рівнянь, де коефіцієнти мають сингулярності в певних точках. Метод Фробеніуса є фундаментальним аналітичним апаратом, що дозволяє знайти розв'язок у формі ряду з дробовим показником степеня там, де класичні методи виявляються непридатними.

1. Математична постановка та ідея методу.

Об'єктом дослідження є рівняння вигляду:

$$1)\quad x^2y'' + x\,p(x)y' + q(x)y = 0$$

де $p(x)$ та $q(x)$ — аналітичні функції в околі $x = 0$. Ідея методу полягає у пошуку розв'язку у вигляді узагальненого ряду Фробеніуса:

$$2)\quad \mathrm{y(x)} = \mathrm{x}^{\mathrm{r}} \sum_{n=0}^{\mathrm{n}} a_n = \mathrm{a}_0\mathrm{x}^{\mathrm{r}} + \mathrm{a}_1\mathrm{x}^{\mathrm{r+1}} + \mathrm{a}_2\mathrm{x}^{\mathrm{r+2}} + \ldots$$

де $a0 \neq 0$, а показник r визначається з індексного рівняння

2. Алгоритмічна реалізація.

Процес розв'язання складається з наступних етапів:

- **Диференціювання та підстановка:** Обчислюються похідні y' та y'', які підставляються у вихідне рівняння для групування членів за однаковими степенями x:

$$3)\quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$4)\quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

- **Індексне (характеристичне) рівняння:** Шляхом виділення найменшого степеня x^r формується рівняння для визначення r:

$$5)\quad r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

де $p_0 = lim(x \to 0)\ xp(x)$ та $q_0 = lim(x \to 0)\ x^2 q(x)$.

- **Рекурентне співвідношення:** Для знаходження коефіцієнтів a_n при $n \geq 1$ використовується формула:

$$6)\quad a_n = -[1 / f(n+r)] * \Sigma\, g(k,r)\, a_k$$

що дозволяє послідовно обчислити всі члени ряду від a_0.

3. Класифікація розв'язків за коренями r_1, r_2.

Структура загального розв'язку (7) $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ залежить від характеру коренів:

1. $\boldsymbol{r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}}$**:** два лінійно незалежні ряди Фробеніуса.
2. $\boldsymbol{r_1 = r_2}$**:** другий розв'язок обов'язково містить логарифмічний член (8) $y_2 = y_1 \ln x + x^r\, \Sigma\, b_n x^n$.
3. $\boldsymbol{r_1 - r_2 = n \in \mathbb{Z}}$**:** у другому розв'язку також може з'явитися логарифмічна функція $ln\ x$.

4. Практичне застосування: Рівняння Бесселя.

Ефективність методу демонструється на прикладі рівняння Бесселя нульового порядку:

$$(9)\ x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

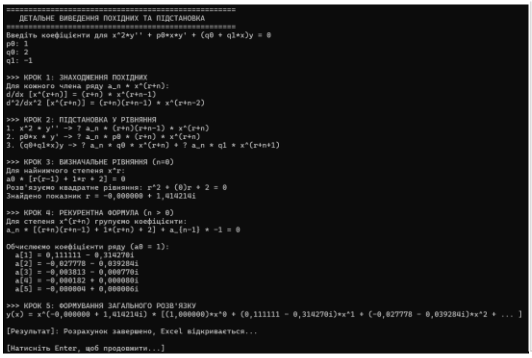
Для цього рівняння $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, що дає індексне рівняння (10) $\boldsymbol{r^2 = 0}$ ($r_1 = r_2 = 0$). Рекурентне співвідношення (10) $a_{n+2} = -a_n / (n+2)^2$ дозволяє отримати розв'язок у вигляді:

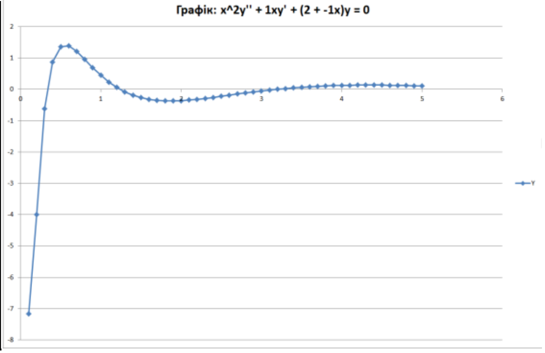
Цей ряд відповідає функції Бесселя $\boldsymbol{J_0(x)}$, яка є фундаментом для дослідження циліндричних хвильових процесів.

Повний код програми

```
void interactiveSolver() {
    clearScreen();
    cout << "============================================================\n";
    cout << "   ДЕТАЛЬНЕ ВИВЕДЕННЯ ПОХІДНИХ ТА ПІДСТАНОВКА       \n";
    cout << "============================================================\n";

    cout << "Введіть коефіцієнти для x^2*y'' + p0*x*y' + (q0 + q1*x)y = 0\n";
    cout << "p0: "; cin >> p0;
    cout << "q0: "; cin >> q0;
    cout << "q1: "; cin >> q1;

    cout << "\n>>> КРОК 1: ЗНАХОДЖЕННЯ ПОХІДНИХ\n";
    cout << "Для кожного члена ряду a_n * x^(r+n):\n";
    cout << "d/dx [x^(r+n)] = (r+n) * x^(r+n-1)\n";
    cout << "d^2/dx^2 [x^(r+n)] = (r+n)(r+n-1) * x^(r+n-2)\n";

    cout << "\n>>> КРОК 2: ПІДСТАНОВКА У РІВНЯННЯ\n";
    cout << "1. x^2 * y'' -> Σ a_n * (r+n)(r+n-1) * x^(r+n)\n";
    cout << "2. p0*x * y' -> Σ a_n * p0 * (r+n) * x^(r+n)\n";
    cout << "3. (q0+q1*x)y -> Σ a_n * q0 * x^(r+n) + Σ a_n * q1 * x^(r+n+1)\n";

    cout << "\n>>> КРОК 3: ВИЗНАЧАЛЬНЕ РІВНЯННЯ (n=0)\n";
    cout << "Для найнижчого степеня x^r:\n";
    cout << "a0 * [r(r-1) + " << p0 << "*r + " << q0 << "] = 0\n";

    double b = p0 - 1.0;
    cout << "Розв'язуємо квадратне рівняння: r^2 + (" << b << ")r + " << q0 << " = 0\n";

    double D = b * b - 4 * q0;
    if (D >= 0) {
        r_main = (-b + sqrt(D)) / 2.0;
    }
    else {
        r_main = cd(-b / 2.0, sqrt(-D) / 2.0);
    }
    cout << "Знайдено показник r = " << fmtComplex(r_main) << "\n";

    cout << "\n>>> КРОК 4: РЕКУРЕНТНА ФОРМУЛА (n > 0)\n";
    cout << "Для степеня x^(r+n) групуємо коефіцієнти:\n";
```

Приклад роботи програми





Програма провела покрокове розв'язання диференціального рівняння:

$$x^2\, y'' + 3xy' + (4 + 4x)y = 0$$

На першому етапі було знайдено показник $r = -1 + 1.73205i$. Наявність уявної частини свідчить про осцилюючий характер розв'язку. Програма розрахувала коефіцієнти ряду до 16-го члена для забезпечення високої точності апроксимації. Отриманий розв'язок у формі степеневого ряду дозволяє візуалізувати поведінку функції на інтервалі $x \in [0.1, 5.0]$. Оскільки дійсна частина показника r є від'ємною $(Re(r) = -1)$, графік демонструє стрімке зростання значень функції при наближенні до особливої точки $x = 0$. Комплексна складова обумовлює наявність коливань, що характерно для рівнянь даного типу. Побудований у Microsoft Excel графік повністю корелює з обчисленими теоретичними даними.

ВИСНОВКИ

У ході виконання даної роботи було досліджено метод Фробеніуса для аналітичного розв’язування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку та реалізовано відповідну програму мовою програмування C++. Розроблений програмний продукт дозволяє автоматизувати процес знаходження коренів індексного рівняння, обчислювати коефіцієнти узагальненого степеневого ряду та візуалізувати отриманий розв’язок у вигляді графіка. Робота дозволила закріпити знання з математичного моделювання, теорії диференціальних рівнянь та об’єктно-орієнтованого програмування, а також продемонструвала практичну ефективність методу Фробеніуса для аналізу систем з регулярними особливими точками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Задачин В. М. Чисельні методи. – Київ : Вища школа, 2003. – 328 с.
2. Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В., Чирун Л. Б. Чисельні методи. – Львів : Світ, 2005. – 408 с.
3. Навчальні матеріали “Чисельні методи в інженерії” / КНТУ. – Київ : КНТУ, 2018. – 250 с.
4. Задачин В. М. Чисельні методи: навчальний посібник. – Харків : ХНУ, 2012. – 312 с.

Тодер Марія – студентка факультету інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95

Дубова Надія Борисівна – старший викладач, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua

Toder Mariia – student of the Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Dubova Nadiya Borysivna – Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske Shosse, 95, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua