УДК 517.96

К. Г. Геселева

ПОБУДОВА МЕТОДОМ КОЛОКАЦІЇ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ТИПУ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Анотація

Застосовано один з наближених методів, а саме метод колокації, для побудови наближених розв'язків одного типу інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю.

Ключові слова: метод колокації, інтегро-функціональне рівняння з малою нелінійністю, наближений розв'язок, система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Abstract

One of the approximate methods, namely the collocation method, is used to construct approximate solutions of one type of integro-functional equation with small nonlinearity.

Keywords: collocation method, integro-functional equation with small nonlinearity, approximate solution, system of linear algebraic equations.

Математичними моделями великої кількості прикладних задач природознавства та техніки є різні типи диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних, диференціально-фунткціональних, інтегро-функціональних рівнянь та їхніх систем. Існує чимало різноманітних підходів до розв'язання таких рівнянь. Відомо, що знайти точні розв'язки згаданих рівнянь вдається лише в окремих, досить простих випадках, тому важливим є дослідження методів побудови наближених розв'язків цих рівнянь.

Мета дослідження: побудова наближеного розв'язку інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю та обґрунтування застосування до нього методу колокації.

У просторі $L_2[a,b]$ розглядаємо інтегро-функціональне рівняння з малою нелінійністю вигляду

$$y(x)=f(x)+p(x)y\big(h(x)\big)+\int_a^b K(x,t)y(t)dt+\int_a^b H(x,t)y\big(h(t)\big)dt+\varepsilon\int_a^b G\big(x,t\big)\Phi\big(t,y\big(t\big)\big)dt,\ x\in\big[a,b\big],\quad (1)$$

з умовою

$$y(x)=\psi(x),\ x\notin\big[a,b\big],\quad (2)$$

де ε – малий додатний параметр, $f(x)$ – відома на $\big[a,b\big]$ та за його межами функція, а $y(x)$ – шукана функція.

Щодо функцій $h(x),\ p(x)$ і ядер $K(x,t), H(x,t), G\big(x,t\big)$ припускаємо, що вони, відповідно на проміжку $\big[a,b\big]$ й у квадраті $\big[a,b\big]^2$ задовольняють умови:

$$\big|p(x)\big|\le\overline{p}<\infty,\quad (3)$$

$h(x)$ – неперервно-диференційовна на $\big[a,b\big]$ і

$$h'(x)\ge l>0,\ x-h(x)\ge\Delta>0,\quad (4)$$

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt=K^2<+\infty,\ \int_a^b\int_a^b H^2(x,t)dxdt=H^2<+\infty,\ \int_a^b\int_a^b G^2(x,t)dxdt=G^2<+\infty.\quad (5)$$

Функція $\Phi\big(t,y\big)$ в області $D=\big\{a\le t\le b,-\infty<y<\infty\big\}$ вимірна по t при всіх y і неперервна по y при всіх t (умова Каратеодорі) і задовольняє умови:

$$\big|\Phi\big(t,y\big)\big|\le\alpha(t)+\beta\big|y\big|,$$

$$\big|\Phi\big(t,y\big)-\Phi\big(t,\overline{y}\big)\big|\le L\big|y-\overline{y}\big|,\quad (6)$$

де β, L – деякі додатні сталі, $\alpha(t) \in L_2[a,b]$.

При виконанні умов (3)-(6) інтегральні оператори

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x,t)v(t)dt,\ (Hv)(x) = \int_a^b H(x,t)v(t)dt,\ (\Phi v)(x) = \varepsilon \int_a^b G(x,t)\Phi(t, v(t))dt,$$

відображають простір $L_2[a,b]$ в себе і є цілком неперервними [1].

Обґрунтування наближених методів розв'язання рівняння (1) полягає в тому, що це рівняння шляхом певних замін і перетворень зводиться до рівняння значно простішої структури, як це зроблено для лінійного інтегро-функціонального рівняння у праці [2]. Слід зауважити, що до рівняння (1) з умовою (2) зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу, причому у випадку, коли $h(x) = x - \Delta, \Delta > 0$, запізнення аргументу Δ – стале.

Рівняння (1) з виконанням умови (2) та умов (3)-(5) можна звести до інтегро-функціонального рівняння з малою нелінійністю вигляду

$$y(x) = f(x) + p(x)y(h(x)) + \int_a^b T(x,t)y(t)dt + \varepsilon \int_a^b G(x,t)F(t, y(t))dt. \quad (6)$$

Ідея ***методу колокації*** стосовно рівняння (1) полягає в тому, що наближений розв'язок $y_m(x)$ шукаємо у вигляді $y_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \varphi_j(x)$ і визначаємо з рівняння

$$y_m(x) - p(x)y_m(h(x)) =$$

$$= f(x) + \int_a^b K(x,t)y_m(t)dt + \int_a^b H(x,t)y_m(h(t))dt + \varepsilon \int_a^b G(x,t)\Phi(t, y_m(t))dt, x \in [a,b],$$

$$y_m(x) = \psi(x),\ x \notin [a,b], \quad (7)$$

де $\{\varphi_j(x)\}$ – система лінійно незалежних на $[a,b]$ функцій, $j = \overline{1,m}$, а невідомі параметри $a_j = a_j(n)$ знаходимо з умови

$$\gamma_m(x_i) = 0, i = \overline{1,n}, \quad (8)$$

$$\gamma_m(x) = y_m(x) - p(x)y_m(h(x)) - f(x) - \int_a^b K(x,t)y_m(t)dt - \int_a^b H(x,t)y_m(h(t))dt - \varepsilon \int_a^b G(x,t)\Phi(t, y_m(t))dt, \quad (9)$$

де x_i – вузли колокації.

Отримано ряд достатніх умов збіжності цього методу. Детально описано умови при яких рівняння (1) можна спростити до рівняння вигляду (6). Застосовано метод колокації (7)-(9) для побудови наближеного розв'язку такого рівняння.

СИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Геселева К.Г. Наближені методи розв'язування інтегро-функціональних рівнянь : монографія. Кам'янець-Подільський : К-ПНУ ім. І. Огієнка; Кам'янець-Подільський : ФОП Панькова А.С., 2022. 144 с.
2. Heseleva K. Collocation-iterative method of solving one type of linear integro-functional equations. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки* : зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2023. Вип. 24. С. 13-21.

Геселева Катерина Григорівна – кандидат фізико-математичних наук, декан фізико-математичного факультету, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, e-mail: heseleva@kpnu.edu.ua

Heseleva Kateryna H. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Dean of the Faculty of Physics and Mathematics, Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University, Kamianets-Podilskyi, e-mail: heseleva@kpnu.edu.ua