

## ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Одеський національний морський університет

**Анотація.** Для істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку у деякому сенсі близьких до двочленних з швидко змінною нелінійністю встановлено достатні умови існування та асимптотичні при  $t \uparrow \omega$  ( $\omega \leq +\infty$ ) зображення швидко змінних розв'язків.

**Ключові слова:** двочленне диференціальне рівняння,  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - розв'язки, асимптотичні зображення розв'язків, швидко змінна функція, одно-, двопараметрична сім'я розв'язків.

**Abstract.** Sufficient conditions of existence and asymptotic representations at  $t \uparrow \omega$  ( $\omega \leq +\infty$ ) of rapidly varying solutions are established for essentially nonlinear non-autonomous second-order differential equations in some sense close to two-term with rapidly varying nonlinearity.

**Keywords:** two-term differential equation,  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solutions, asymptotic representations of solutions, rapidly varying function, one- and two-parameter family of solutions.

Розглядаємо диференціальне рівняння

$$y'' = f(t, y, y'), \quad (1)$$

де  $f: [a, \omega[ \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow \mathbb{R}$  - неперервна функція,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ,  $\Delta_{Y_i}$  ( $i \in \{0, 1\}$ ) - однокілий окіл  $Y_i$  і  $Y_i$  ( $i \in \{0, 1\}$ ) або 0 або  $\pm\infty$ . Припускаємо, що числа  $\mu_i$  ( $i = 0, 1$ ), які визначено формулами

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо або } Y_i = +\infty, \text{ або } Y_i = 0 \text{ і } \Delta_{Y_i} - \text{правий окіл } 0, \\ -1, & \text{якщо або } Y_i = -\infty, \text{ або } Y_i = 0 \text{ і } \Delta_{Y_i} - \text{лівий окіл } 0, \end{cases}$$

задовольняють нерівності

$$\mu_0 \mu_1 > 0 \text{ для } Y_0 = \pm\infty \text{ і } \mu_0 \mu_1 < 0 \text{ для } Y_0 = 0. \quad (2)$$

Умови (2) є необхідними для існування розв'язків рівняння (1), визначених у лівому околі  $\omega$  і таких, що задовольняють умови

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1). \quad (3)$$

Одним з класів розв'язків рівняння (1) з властивостями (3), що мають певні асимптотичні зображення є клас  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - розв'язків.

**Означення 1.** [1] Розв'язок у рівняння (1) на інтервалі  $[t_0, \omega[ \subset [a, \omega[$  називаємо  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком, де  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , якщо поряд з (3), воно задовольняє умову

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

**Означення 2.** Будемо говорити, що функція  $f$  задовольняє умову  $(FN)_{\lambda_0}$  при  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , якщо існують число  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ , неперервна функція  $p: [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  і двійчі неперервно диференційовна функція  $\varphi_0: \Delta_{Y_0} \rightarrow ]0, +\infty[$ , що задовольняє умови

$$\varphi_0'(y) \neq 0, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_0(y) = \varphi_0 \in \{0, +\infty\}, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(y)\varphi_0''(y)}{(\varphi_0'(y))^2} = 1,$$

такі, що для будь-яких довільних неперервно диференційовних функцій  $z_i : [a, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_i}$  ( $i = 0, 1$ ), які задовольняють умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_i(t) = Y_i \quad (i = 0, 1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z_0'(t)}{z_0(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z_1'(t)}{z_1(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \quad \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty \end{cases}$$

має місце зображення

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 p(t) \varphi_0(z_0(t)) [1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Для  $\lambda_0 \in R \setminus \{0, 1\}$  і виконанні умови  $(FN)_{\lambda_0}$  на функцію  $f$  з використанням результатів із [2], [3], [4] встановлено умови, за яких диференціальне рівняння (1) має одно- (дво) параметричну сім'ю  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$  – розв'язків з певними асимптотичними зображеннями.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Евтухов В.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / В. М. Евтухов — Киев, 1998. – 295 с.
2. Черникова А.Г. Асимптотична поведінка розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з швидко змінними нелінійностями: дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / А.Г.Черникова — Одеса, 2019. – 156 с.
3. Bingham N.H. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications /N.H. Bingham, С.М. Goldie, J.L.Teugels. — Cambridge university press. Cambridge, 1987. — 494 p.
4. Самойленко А.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями/ В.М. Евтухов, А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. - 2011. - 47, №.5. — С. 628-650.

**Кусік Людмила Ігорівна** — канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математики, фізики та астрономії, Одеський національний морський університет, м. Одеса

**Kusik Liudmyla I.** — Ph.D. n., associate professor of ONMU, Odesa National Maritime University, Odesa