

СКІНЧЕННА НАПІВГРУПА МАННА, ВСІ КОНГРУЕНЦІЇ ЯКОЇ Є КОНГРУЕНЦІЯМИ РІСА

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Знайдено необхідні і достатні умови, для того щоб кожна конгруенція скінченної переставної напівгрупи Манна була конгруенцією Ріса.

Ключові слова: напіврешітка, ізоморфізм, ідеал, конгруенція, напівгрупа Манна

Abstract

Necessary and sufficient conditions were found for each congruence of a finite congruence-permutable Munn semigroup to be a Rees congruence.

Keywords: semilattice, isomorphism, ideal, congruence, Munn semigroup

Вступ

Напівгрупа S називається напіврешіткою, якщо вона є комутативною (тобто виконується тотожність $xu = ux$ для будь-яких елемента $x, u \in S$) і кожний її елемент є ідемпотентом (тобто виконується тотожність $xx = x$). Добре відомо, що за допомогою бінарної операції на S можна визначити стабільний порядок, а саме: $x \leq y \Leftrightarrow xy = x$. Далі, напівгрупа I називається інверсною, якщо для будь-якого елемента $x \in I$ існує єдиний елемент x^{-1} такий, що $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. Відомо (див., наприклад [1]), що напівгрупа є інверсною тоді і лише тоді, коли вона є регулярною і будь-які два її ідемпотенти комутують. Отже, множина всіх ідемпотентів інверсної напівгрупи I відносно операції множення є напіврешіткою, яку зазвичай позначають через $E(I)$. Однією з найважливіших конструкцій в теорії напівгруп є так звана напівгрупа Манна. Опишемо її. Нехай S є скінченною напіврешіткою. Ідеал напіврешітки S , що породжується елементом a , має форму aS і називається головним. Зазначимо, що $xS \cap yS = xyS$ для будь-яких $x, y \in S$. Розглянемо множину всіх ізоморфізмів між головними ідеалами скінченної напіврешітки. Ця множина відносно звичайної операції композиції утворює інверсний моноїд, який називають напівгрупою Манна і позначають через $\Phi(S)$. Такі поняття як «зображення Манна», «фундаментальна інверсна напівгрупа» відіграють важливу роль в теорії інверсних напівгруп (див., наприклад [1]). Напівгрупа називається конгруенц-переставною, якщо будь-які дві її конгруенції комутують відносно звичайної операції композиції бінарних відношень. В статті [2] з'ясовано структуру конгруенц-переставної скінченної напівгрупи Манна. Сформулюємо відповідний результат.

Theorem 1. *Let S be a semilattice of finite length. The Munn semigroup $\Phi(S)$ is congruence-permutable if and only if the following two conditions are satisfied:*

(i) *if $a, b \in S$, and $\text{rank}(a) = \text{rank}(b)$, then $aS \cong bS$;*

(ii) *for any $e \in S$ ($\text{rank}(e) \geq 2$), there exist $\varphi, \xi \in S$ such that $\varphi \neq \xi$, $\varphi < e$, $\xi < e$, and $\text{rank}(\varphi) = \text{rank}(\xi) = \text{rank}(e) - 1$.*

Результати дослідження

Нехай S – довільна напівгрупа. Кожному ідеалу A напівгрупи S відповідає конгруенція Ріса $R_A = \Delta_S \cup (A \times A)$, де Δ_S є відношенням рівності на напівгрупі S . Для того, щоб сформулювати основний результат нашого дослідження нам знадобиться ще одне означення. Напіврешітка називається примітивною, якщо висота довільного її елемента не перевищує 1. Нехай $\Phi(S)$ – конгруенц-переставна напівгрупа Манна. Яким умовам має задовольняти напіврешітка S , для того щоб кожна конгруенція інверсного моноїда $\Phi(S)$ була конгруенцією Ріса? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема. Нехай $\Phi(S)$ -- конгруенц-переставна напівгрупа Манна. Кожна конгруенція на інверсній напівгрупі $\Phi(S)$ є конгруенцією Ріса тоді і лише тоді, коли напіврешітка S є примітивною.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Lawson M.V., Inverse semigroups. The theory of partial symmetries / World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998.
2. Derech V.D., Structure of a permutable Munn semigroup of finite rank / Ukrainian Mathematical Journal **58** (6) (2006), 836-841.

Дереч Володимир Дмитрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету, Вінниця, derech@vntu.edu.ua

Барковська Алла Андріївна, старший викладач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету, Вінниця, barkovska@vntu.edu.ua

Derech Volodymyr Dmytrovych, PhD in Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, derech@vntu.edu.ua

Barkovska Alla, Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, barkovska@vntu.edu.ua