

## ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ В ОБЛАСТІ ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

Вінницький національний технічний університет

### *Анотація*

*Похідна є фундаментальним поняттям у математичному аналізі, що описує швидкість зміни однієї величини відносно іншої. У даній роботі розглянуто основні концепції похідної та її численні застосування в різних галузях науки і техніки. Зокрема, обговорено використання похідних у фізиці для аналізу кінематики та електродинаміки, в інженерії для оптимізації механічних систем та розробки систем автоматичного керування, в економіці для граничного аналізу та оптимізації доходів і витрат, а також у біології для моделювання популяційної динаміки та аналізу біохімічних процесів. Зроблено висновок, що похідна є потужним інструментом, який допомагає зрозуміти і моделювати динамічні процеси в різних наукових і технічних дисциплінах.*

**Ключові слова:** *похідна, математичний аналіз, швидкість зміни, кінематика, електродинаміка, оптимізація, автоматичне керування, граничний аналіз, моделювання, біохімічні процеси.*

### **Abstract**

*The derivative is a fundamental concept in mathematical analysis that describes the rate of change of one quantity relative to another. This paper explores the basic concepts of the derivative and its numerous applications across various fields of science and engineering. Specifically, it discusses the use of derivatives in physics for analyzing kinematics and electrodynamics, in engineering for optimizing mechanical systems and developing automatic control systems, in economics for marginal analysis and optimizing revenue and costs, and in biology for modeling population dynamics and analyzing biochemical processes. The conclusion emphasizes that the derivative is a powerful tool that aids in understanding and modeling dynamic processes in diverse scientific and technical disciplines.*

**Keywords:** *derivative, mathematical analysis, rate of change, kinematics, electrodynamics, optimization, automatic control, marginal analysis, modeling, biochemical processes.*

### **Вступ**

Похідна, як фундаментальне поняття в математичному аналізі, відіграє ключову роль у розумінні та моделюванні різноманітних процесів у природі та техніці. Її використання поширене в широкому спектрі наукових дисциплін, від фізики та інженерії до економіки та біології. В даній роботі ми дослідимо основні концепції похідної та її застосування в різних галузях науки та техніки.

Спочатку розглянемо математичне визначення похідної та її геометричний сенс. Потім дослідимо фізичний інтерпретації похідної в контексті кінематики, електродинаміки та інших фізичних явищ. Подальше дослідження охопить застосування похідних в інженерії для оптимізації та керування системами, в економіці для аналізу та прийняття рішень, і в біології для моделювання складних біохімічних та екологічних процесів.

Розуміння ролі та застосування похідної є важливим як для студентів технічних спеціальностей, так і для вчених, що працюють у різних наукових галузях. Ця робота спрямована на збагачення нашого розуміння та використання цього потужного математичного інструменту в різноманітних контекстах.

## Використання похідної в математиці

У математиці застосування похідних є важливим і широким. Ось деякі з найпоширеніших застосувань похідних у математиці: По-перше, в аналізі функцій похідна використовується для визначення екстремумів функцій, знаходження точок перегину та інших властивостей графіків функцій. Вона також допомагає в розрахунках площі під кривими та об'ємів тіл, що обертаються.[2] Друге застосування похідних знаходиться в розв'язанні диференціальних рівнянь, які моделюють зміну в часі або просторі різних фізичних, економічних або біологічних систем. Третє, в теорії ймовірностей і статистиці, визначення функцій щільності ймовірностей, функцій розподілу та інших характеристик випадкових величин часто використовують похідні.[4] У геометрії, похідні використовуються для визначення кривизни кривих та поверхонь, а також для розрахунку довжини дуги та радіуса кривизни.[3] Також вони застосовуються в аналітичній геометрії для визначення відносної розміщеності кривих та виведення рівнянь дотичних до кривих. Теорія оптимізації використовує похідні для пошуку глобальних або локальних мінімумів або максимумів функцій.

## Використання похідної у фізиці

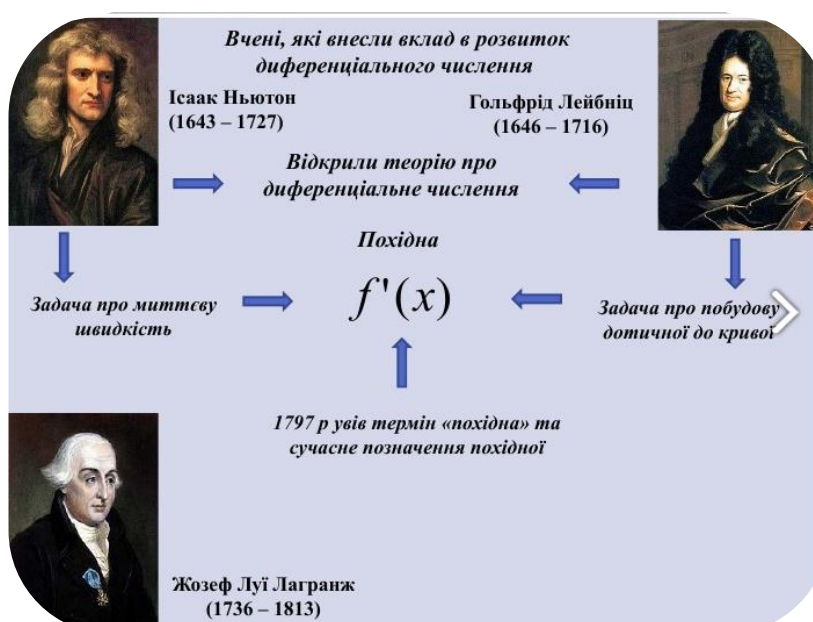


Рисунок 1 – Вчені які внесли вклад в математику

Похідна є важливим математичним інструментом у фізиці, оскільки дозволяє описувати і аналізувати різноманітні фізичні процеси. У кінематиці похідна від координати по часу дає швидкість об'єкта, а похідна від швидкості по часу – прискорення. Наприклад, якщо  $x(t)$  - положення об'єкта в момент часу  $t$ , то швидкість  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ , а прискорення  $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ . У динаміці другий закон Ньютона виражається як  $F = ma$ , де  $F$ - сила,  $m$ - маса,  $a$ -прискорення. Похідна від імпульсу по часу дорівнює силі, яка діє на тіло: якщо  $p(t) = mv(t)$ , то  $F = \frac{dp(t)}{dt}$  (рис.1).

В електродинаміці похідні використовуються для опису змін електричних і магнітних полів у просторі та часі, як у рівняннях Максвелла, наприклад, закон Фарадея для індукції електричного поля виражається як  $E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ . Аналіз змін струму і напруги в електричних колах базується на диференціальних рівняннях, що містять похідні від струму і напруги. У термодинаміці похідні використовуються для опису швидкості зміни температури в матеріалах і об'єктах. Закон

охолодження Ньютона виражається як  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{окр})$ , де  $T$  -температура об'єкта,  $T_{окр}$  - температура навколишнього середовища, а  $k$  -контсанта теплообміну.

В оптиці аналіз зміни кутів заломлення і відбивання при переході світла між середовищами з різними показниками заломлення використовує похідні для розрахунку градієнтів показника заломлення. В астрофізиці диференціальні рівняння, що містять похідні, використовуються для моделювання орбіт планет, руху зірок та інших небесних тіл під дією гравітаційних сил. Похідна дозволяє фізикам моделювати і аналізувати динамічні процеси, що є основою для розуміння складних систем і явищ у природі. Використання похідних є критично важливим для розв'язання фізичних задач і розробки нових технологій.

### Задача

Задача.

При виверженні вулкану камені гірської породи викидаються перпендикулярно вгору з початковою швидкістю 120 м / с. Якої найбільшої висоти досягне каміння, якщо опором вітру знехтувати?



При виверженні вулкану камені гірської породи викидаються перпендикулярно вгору з початковою швидкістю 120 м/с. Якої найбільшої висоти досягне каміння, якщо опором вітру знехтувати?

Увага! Речовина викидається перпендикулярно вгору. Висота каменя  $h$  дорівнює шляху

$$S(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Початкові умови:  $v_0 = 120$  м/с

За фізичним змістом похідної:  $v(t) = S'(t) = v_0 - gt$

Знайдемо критичні точки функції:  $v_0 - gt = 0$ ,  $120 - 9,8t = 0$ ,

$$t = \frac{120}{9,8} \approx 12,3 \text{ с.}$$

12,3 - критична точка максимуму, тоді

$$h(t) = 120 \cdot 12,3 - \frac{9,8 \cdot 12,3^2}{2} = 1476 - 441 = 735 \text{ м}$$

### Висновки

Похідна є фундаментальним математичним інструментом, який відіграє вирішальну роль у багатьох наукових і технічних дисциплінах. Її застосування дозволяє детально аналізувати та моделювати різноманітні процеси у фізиці, інженерії, економіці, біології та інших галузях. Зокрема, у фізиці похідна допомагає описувати кінематику руху, аналізувати динаміку сил, моделювати електромагнітні поля, теплообмінні процеси, оптичні явища та астрофізичні системи. Вона є ключовим елементом у розв'язанні диференціальних рівнянь, що описують зміну фізичних величин у часі та просторі. Розуміння і використання похідних дозволяє науковцям і інженерам розв'язувати складні задачі, прогнозувати поведінку систем, оптимізувати процеси та розробляти нові технології. Таким чином, похідна є потужним інструментом, який значно розширює можливості аналізу і моделювання динамічних систем у різних наукових і прикладних контекстах.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Коваль, В. М. Похідні у фізичних задачах. Київ: Видавництво КНУ ім. Тараса Шевченка, 2016.
2. Васильєв, Д. Д. Математичний аналіз: функції, похідні та їх застосування. Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2013.
3. Адамович, В. С. Вища математика: диференціальні рівняння та похідні. Київ: Вища школа, 2005.
4. Сидоренко, О. Г. Похідні та їх застосування в різних галузях науки. Київ: Академперіодика, 2015.

**Безруков Владислав Олександрович** – студент групи 2КІ-236, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: [bezrukovvladyslav8578212@gmail.com](mailto:bezrukovvladyslav8578212@gmail.com)

Науковий керівник: **Коломієць Альона Анатоліївна** — проф. кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, email: [alona.kolomiets.vnt@gmail.com](mailto:alona.kolomiets.vnt@gmail.com)

**Bezrukov Vladislav O.** – students, 2CE-23B, Faculty of information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsa National Technical University, email: [bezrukovvladyslav8578212@gmail.com](mailto:bezrukovvladyslav8578212@gmail.com)