

Сфери використання кривих другого порядку

Вінницький Національний Технічний Університет

Анотація:

Криві другого порядку, також відомі як конічні перерізи, відіграють важливу роль у багатьох галузях науки та техніки. Ця наукова теза досліджує різноманітні застосування кривих другого порядку, зосереджуючись на їхньому глибокому впливі на математику, фізику та інші наукові дисципліни. Теза розглядає геометричні властивості конічних перерізів, таких як еліпси, параболи та гіперболи, і їх використання для моделювання та аналізу різних природних і технічних явищ. Крім того, теза описує застосування кривих другого порядку в астрономії, оптиці та інженерії, включаючи траєкторії планет, фокусування світлових променів і розрахунки в механіці. Окрім цього, досліджується використання конічних перерізів у статистиці та економіці для моделювання кореляційних зв'язків та оптимізацій процесів.

Ключові слова: Криві другого порядку; Конічні перерізи; Еліпси; Параболи; Гіперболи; Геометричні властивості; Моделювання; Аналіз; Астрономія; Оптика; Інженерія; Траєкторії планет; Фокусування світлових променів; Механіка; Статистика; Економіка; Математика; Теорія чисел; Криптографія; Алгебра; Гравітація; Аеродинаміка; Фінансова аналітика; Ризики та доходи; Маршалл про попит; Функція попиту; Функція пропозиції.

Abstract:

Second-order curves, also known as conic sections, play an important role in many fields of science and technology. This research thesis explores various applications of second-order curves, focusing on their profound influence on mathematics, physics, and other scientific disciplines. This article examines the geometric properties of conic sections, such as ellipses, parabolas, and hyperbolas, and their use in modeling and analyzing various natural and engineering phenomena. In addition, the thesis describes applications of other-order curves in astronomy, optics, and engineering, including planetary trajectories, focusing of light rays, and calculations in mechanics. without this, the use of conic sections in statistics and economics for modeling correlations and optimizing processes is investigated.

Keywords: Curves of the second order; Conical sections; Ellipses; Parabolas; Hyperboles; Geometric properties; Modeling; Analysis; Astronomy; Optics; Engineering; Trajectories of the planets; Focusing of light rays; Mechanics; Statistics; Economy; Math; Number theory; Cryptography; Algebra; Gravitation; Aerodynamics; Financial analytics; Risks and returns; Marshall on demand; Demand function; Offer function.

Вступ

Криві другого порядку, також відомі як конічні перетини або конічні криві, є однією з фундаментальних тем у геометрії та аналітичній геометрії. Ці криві утворюються в результаті перетину площини з конусом і включають в себе коло, еліпс, параболу та гіперболу. Кожна з цих кривих має унікальні властивості та застосування в різних галузях науки і техніки. Конічні перетини мають значний історичний і математичний інтерес. Вони були вивчені ще стародавніми грецькими математиками, такими як Аполлоній Пергський, чиї праці заклали основи для сучасного розуміння цих кривих.

Застосування кривих другого порядку в математиці

Криві другого порядку відіграють важливу роль у багатьох галузях математики, зокрема у теорії чисел, алгебрі і геометрії. У теорії чисел криві другого порядку можуть використовуватися для дослідження різних арифметичних властивостей цілих чисел, таких як прості числа. Наприклад, еліптичні криві (рис.1), які є особливим випадком кривих другого порядку, займають центральне місце в теорії чисел і криптографії, де вони використовуються для побудови криптографічних протоколів та систем шифрування [1].

У алгебрі криві другого порядку зазвичай розглядаються як алгебраїчні об'єкти, що описуються алгебраїчними рівняннями. Вони можуть бути використані для вивчення різних алгебраїчних структур, таких як поля і кільця, а також для дослідження топології та геометрії алгебраїчних об'єктів (рис. 2).

У геометрії криві другого порядку грають ключову роль у вивченні властивостей простору. Вони можуть представляти собою різні геометричні об'єкти, такі як кола, еліпси, параболи та гіперболи (рис.

3), і вивчення їх властивостей дозволяє зрозуміти структуру простору та його взаємозв'язки з іншими математичними об'єктами[2].

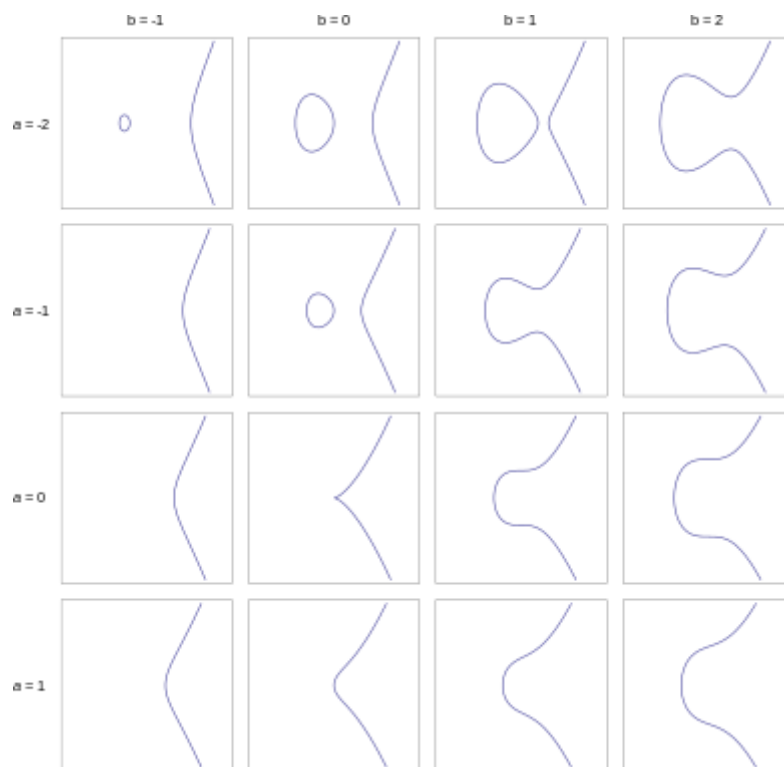


Рисунок 1 – приклад еліптичних кривих

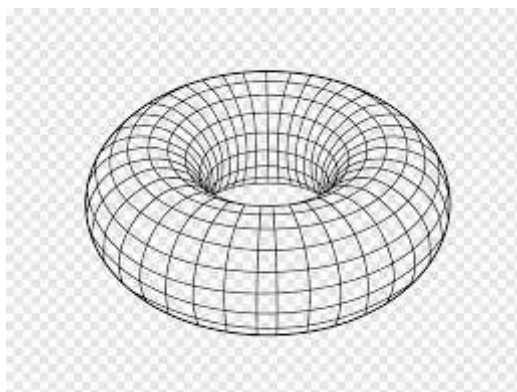


Рисунок 2 – приклад топології та геометрії

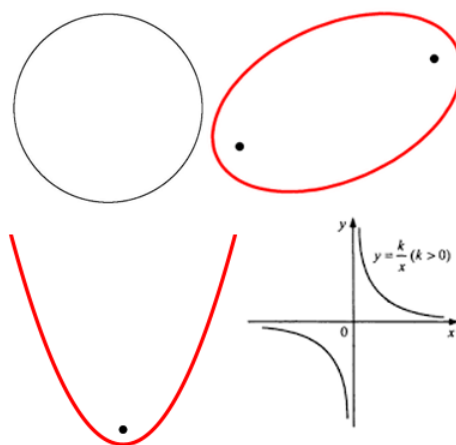


Рисунок 3 – приклад кола, еліпси, параболи та гіперболи

Застосування кривих другого порядку в фізиці

В фізиці криві другого порядку знаходять широке застосування для моделювання різноманітних фізичних явищ та процесів. Одним з основних застосувань є використання параболічних кривих, які є одним з типів кривих другого порядку, для моделювання траєкторій руху об'єктів під дією гравітації (рис. 4). Наприклад, траєкторія руху м'яча, який кидають вертикально вгору, є параболою через закони Ньютона[7].

Еліптичні криві, інший вид кривих другого порядку, також мають важливе значення в фізиці. Вони використовуються для опису траєкторій руху об'єктів, таких як планети, які рухаються під дією гравітаційного поля (рис. 5). Наприклад, закони Кеплера про рух планет навколо Сонця можна описати використовуючи еліптичні орбіти.

Крім того, гіперболічні криві, третій тип кривих другого порядку, також мають своє застосування в фізиці. Наприклад, гіперболічні траєкторії можуть виникати при руху об'єктів під дією гравітації при великих швидкостях або при використанні гравітаційного вибуху для маневрування космічними апаратами. Таким чином, розуміння кривих другого порядку в фізиці дозволяє моделювати та розуміти різноманітні фізичні явища в природі[5].

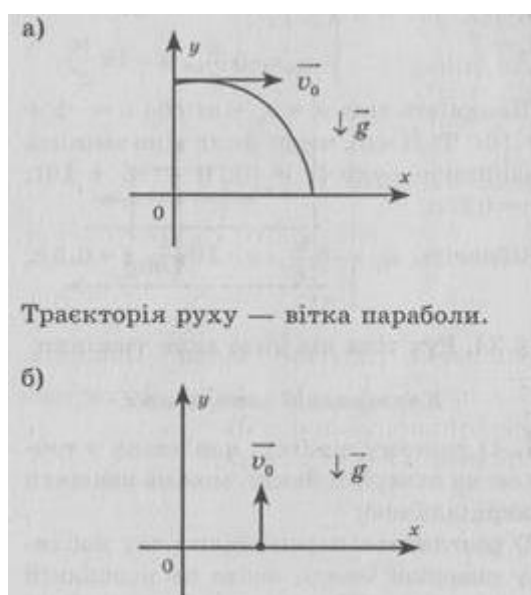


Рисунок 4 – приклад траєкторій руху об'єктів під дією гравітації



Рисунок 5 – приклад планети, яка рухається під дією гравітаційного поля

Застосування кривих другого порядку в інженерії

У інженерії криві другого порядку відіграють важливу роль у моделюванні різноманітних фізичних об'єктів та процесів.

По-перше, параболічні криві широко використовуються в оптиці. Наприклад, вони застосовуються в проектуванні параболічних антен для радіо та мікрохвильових систем зв'язку. Параболічні дзеркала використовуються для фокусування світла в оптичних системах, що дозволяє підвищити ефективність сонячних концентраторів та телескопів[4].

Друге застосування кривих другого порядку в інженерії пов'язане з аеродинамікою. Наприклад, профіль крила літака може бути описаний за допомогою еліптичної кривої, яка визначає форму крила та дозволяє виробникам оптимізувати характеристики польоту, такі як підйомна сила та опір повітря (рис. 6).

Третє застосування полягає в області конструкцій та механіки. Криві другого порядку можуть використовуватися для моделювання руху об'єктів, таких як тіла відбиття або рух з гравітаційним впливом. Наприклад, гіперболічні криві можуть бути використані для моделювання траєкторій руху проєктилів або снарядів у вільному просторі[9].

Усі ці застосування кривих другого порядку в інженерії демонструють їхню важливість у створенні ефективних та оптимізованих технологічних рішень у різних галузях інженерної діяльності.



Рисунок 6 – приклад профіля крила літака

Застосування кривих другого порядку в економіка

У економіці криві другого порядку, зокрема параболи та еліпси, можуть мати різноманітні застосування, особливо в аналізі та моделюванні різних економічних процесів та явищ.

Перш за все, параболічні криві можуть бути використані для моделювання різноманітних економічних функцій та залежностей, таких як функція попиту та функція пропозиції. Наприклад, закон Маршалла про попит може бути апроксимований параболою, що допомагає економістам зрозуміти залежність між ціною та кількістю товару, який споживачі готові купити.

Друге застосування полягає в використанні еліптичних кривих для моделювання ризиків та доходів у фінансовій аналітиці. Еліптичні криві, зокрема еліптичні розподіли, дозволяють оцінювати ризики та доходи, пов'язані з інвестиціями, і використовуються для побудови моделей портфеля та управління ризиками[8].

Крім того, криві другого порядку можуть використовуватися для моделювання руху цін на ринку капіталу. Наприклад, гіперболічні криві можуть бути використані для апроксимації траєкторій цін акцій чи інших фінансових інструментів, що допомагає прогнозувати їхнє майбутнє рух. Такі моделі можуть бути корисними для трейдерів, аналітиків та інвесторів у процесі прийняття рішень щодо управління портфелем та ризиками.

Отже, криві другого порядку грають важливу роль в економічній науці, допомагаючи аналізувати, моделювати та прогнозувати різноманітні економічні явища та процеси.

Задача

Струмінь фонтану зазвичай параболічної форми, вершина буде знаходитися в точці $A(0.5; 4)$. Вісь симетрії паралельна осі Oy . Знайти рівняння траєкторії струменя фонтану (рис. 7).

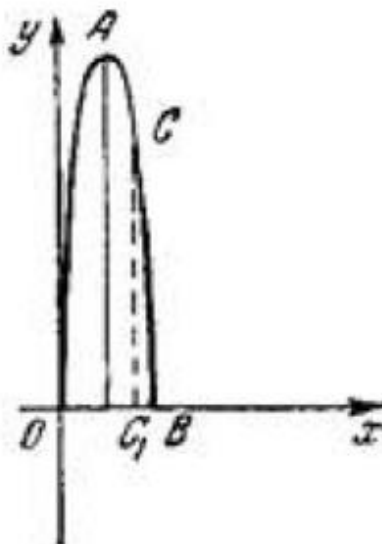


Рисунок 7 – приклад струменя фонтана

Рівняння параболи з вершиною в точці (a, b) і директрисою, паралельною осі Oy , має вигляд:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Підставимо в рівняння значення координат вершини параболи $A(0.5; 4)$:

$$(x - 0.5)^2 = 2p(y - 4)$$

Перетворимо рівняння:

$$x^2 - x + 0.25 = 2p(y - 4)$$

$$y - 4 = (x^2 - x + 0.25) / (2p)$$

Підставимо в рівняння координати точки $B(0.75; 3)$:

$$3 - 4 = (0.75^2 - 0.75 + 0.25) / (2p)$$

$$-1 = 0.25 / (2p)$$

$$p = 0.25 / 2$$

$$p = 0.125$$

Підставимо значення p в рівняння:

$$y = 16(x - x^2)$$

Отже ми знайшли рівняння траєкторії струменя фонтану:

$$y = 16(x - x^2)$$

Висновки

Криві другого порядку є невід'ємною частиною математичних моделей та аналізу в різних галузях науки і технологій. Вони знаходять широке застосування в математиці, фізиці, економіці та інших дисциплінах.

Аналіз кривих другого порядку дозволяє нам краще розуміти геометричні властивості простору та взаємозв'язки між різними об'єктами. Вони також є потужним інструментом для моделювання різних фізичних, економічних та інших процесів, що дозволяє нам аналізувати та прогнозувати їхні характеристики та поведінку.

Застосування кривих другого порядку у різних галузях навчання та досліджень свідчить про їхню універсальність та значущість. Розуміння їхніх властивостей та застосування дозволяє нам краще розуміти природу навколишнього світу і використовувати це знання для вирішення реальних проблем та завдань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Андрушко, І. О. Аналітична геометрія. Київ: Вища школа, 2008.
2. Біляшівський, Л. М. Конічні перетини: теорія і застосування. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2015. – 67с.
3. Волошук, Ю. М. Геометрія: Підручник для вищих навчальних закладів. Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2011. – 96с.
4. Гладун, М. О. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Тернопіль: ТНПУ ім. В. Гнатюка, 2012. – 45с.
5. Дяченко, О. В. Вступ до аналітичної геометрії. Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2013.
6. Зайцев, В. Ф. Основи геометрії. Київ: Академперіодика, 2009. – 67с.
7. Климчук, А. І. Геометрія і геометричні побудови. Львів: Видавництво ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – 87с.
8. Погорелов, О. В. Геометрія. Планіметрія та стереометрія. Київ: Радянська школа, 1986. – 103с.
9. Прокопенко, Т. М. Математичний аналіз та аналітична геометрія. Дніпро: ДНУ ім. Олесь Гончара, 2010. – 120с.

Коваль Сергій Вікторович – студент групи 2КІ-236, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: kovals2004@gmail.com

Науковий керівник: **Дубова Надія Борисівна** — ст. викладач кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, email: dubova1953@gmail.com

Serhiy Viktorovych Koval – student of group 2КИ-23b, faculty of information technologies and computer engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: kovalser2004@gmail.com

Supervisor: **Dubova Nadiia Borysivna** - Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine, email: dubova1953@gmail.com