УДК [519.642:004.4](043.2)

О. В. Самсонюк[1]
Н. Б. Дубова[2]

ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ РІЗНИХ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ ПРОГРАМНИМИ ЗАСОБАМИ ТА ЇХ ПОРІВНЯЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА

Вінницький національний технічний університет

Анотація
У цій роботі досліджуються чисельні методи обчислення визначених інтегралів, зокрема методи прямокутників і трапецій. Розглядаються теоретичні аспекти цих методів, їх переваги та недоліки.
Ключові слова: чисельні методи, метод прямокутників, метод трапецій, визначений інтеграал.

Abstract
In this paper, we study numerical methods for calculating definite integrals, in particular the rectangle and trapezoidal methods. The theoretical aspects of these methods, their advantages and disadvantages are considered.
Keywords: numerical methods, method of rectangles, method of trapezoids, definite integral.

Вступ

Обчислення площі під кривою, заданою неперервною функцією, є однією з фундаментальних задач математичного аналізу. Ця задача знаходить широке застосування в різних галузях науки і техніки, таких як фізика, інженерія, економіка та інші.

Одним із основних методів вирішення цієї задачі є визначений інтеграл, який дозволяє знайти точне значення площі під кривою на заданому інтервалі. Проте у випадках, коли обчислити визначений інтеграл аналітично складно або неможливо, на допомогу приходять чисельні методи інтегрування. Серед найбільш поширених чисельних методів виділяють метод прямокутників та метод трапецій. Ці методи базуються на апроксимації площі під кривою за допомогою простих геометричних фігур — прямокутників або трапецій.

Результати дослідження

Метод прямокутників є одним із простих і поширених чисельних методів інтегрування, який базується на апроксимації площі під кривою за допомогою прямокутників. Основна ідея цього методу полягає у розбитті інтервалу інтегрування на рівні частини та обчисленні суми площ прямокутників, висоти яких визначаються значеннями функції у певних точках поділу.

Існують три основні варіації методу прямокутників:

1. Метод лівих прямокутників. У методі лівих прямокутників висота кожного прямокутника визначається значенням функції у лівій точці відповідного підінтервалу.

Геометрична інтерпритація наведена на рис. 1.

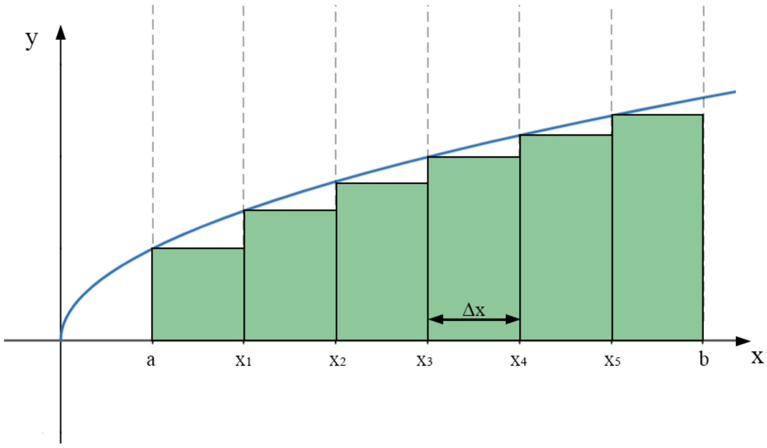

Рис. 1. Геометрична інтерпритація методу лівих прямокутників

Формула лівих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x, \tag{1}$$

де $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ – ширина кожного під інтервалу.

2. Метод правих прямокутників. У методі правих прямокутників висота кожного прямокутника визначається значенням функції у правій точці підінтервалу. Подібно до методу лівих прямокутників, цей метод є простим у реалізації, але може мати значні похибки за наявності великих змін функції.

Геометрична інтерпритація наведена на рис. 2.

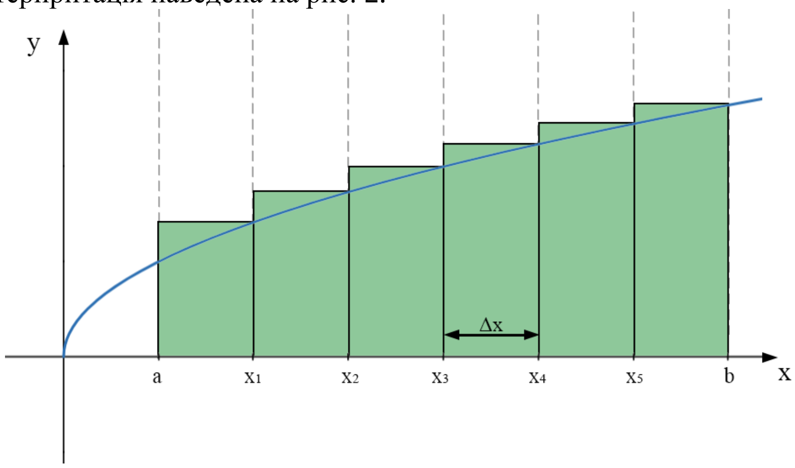

Рис. 2. Геометрична інтерпритація методу правих прямокутників

Формула правих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \tag{2}$$

де $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ – ширина кожного під інтервалу.

3. Метод середніх прямокутників. У методі середніх прямокутників висота кожного прямокутника визначається значенням функції у середині відповідного підінтервалу. Цей метод зазвичай забезпечує більш точні результати порівняно з методами лівих і правих прямокутників, оскільки середні значення функції краще враховують її поведінку на інтервалі. Метод середніх прямокутників має більшу точність обчислення порівняно з двома попередніми.

Геометрична інтерпритація наведена на рис. 3.

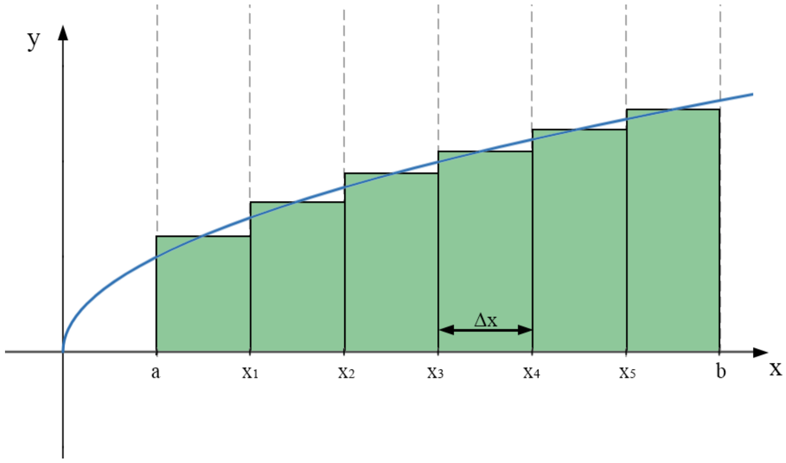

Рис. 3. Графічна інтерпритація методу середніх прямокутників

Формула середніх прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\Delta x, \tag{3}$$

де $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ – ширина кожного під інтервалу.

Варто зазначити, що суттєва різниця в результатах між методами лівих, правих і середніх прямокутників стає помітною лише при невеликій кількості кроків (підінтервалів). У цьому випадку вибір методу може значно вплинути на точність обчислень. Проте, при збільшенні кількості кроків, ці відмінності поступово зменшуються. У результаті, при великій кількості кроків різниця між методами стає мінімальною, і всі три методи наближаються до точного значення інтегралу.

Метод трапецій є одним із найбільш поширених чисельних методів інтегрування, що базується на апроксимації площі під кривою за допомогою трапецій. Цей метод забезпечує більш точні результати порівняно з методом прямокутників, особливо при малих значеннях кількості підінтервалів, оскільки він краще враховує зміну функції на кожному підінтервалі.

Основна ідея методу трапецій полягає в тому, щоб розбити інтервал інтегрування на рівні частини та на кожному підінтервалі наближати функцію лінійною функцією. Це дозволяє отримати трапецію, основи якої є значеннями функції у кінцевих точках підінтервалу, а висота – довжиною підінтервалу. Сума площ таких трапецій дає апроксимацію площі під кривою.

Геометрична інтерпритація навадена на рис. 4.

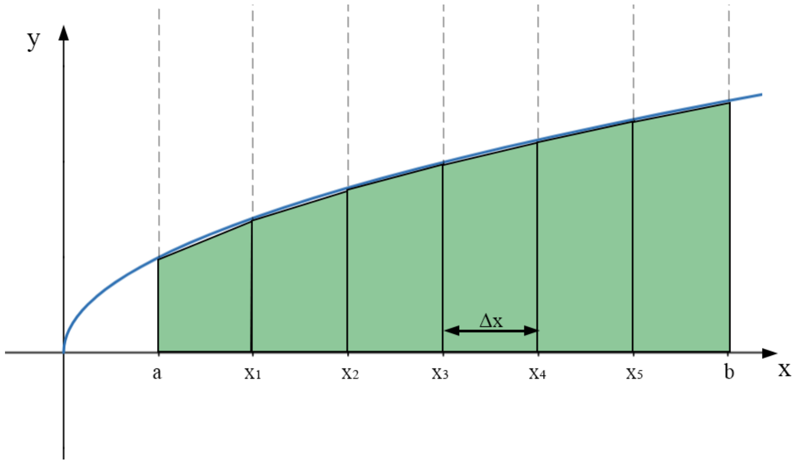

Рис. 4. Графічна інтерпритація методу трапецій

Формула методу трапецій:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\right)h = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right), \qquad (4)$$

де $h = x_{i+1} - x_i$.

Метод трапецій має кілька переваг і недоліків, які варто враховувати при його використанні. Однією з основних переваг є його простота і наочність, що робить метод доступним для розуміння і реалізації. Крім того, метод трапецій добре підходить для функцій, які мають плавні зміни на інтервалі інтегрування. Однак, якщо функція має різкі зміни або розриви, метод трапецій може давати значні похибки. У таких випадках може бути доцільно застосовувати більш складні методи чисельного інтегрування, такі як метод Сімпсона або адаптивні методи.

Метод трапецій також може бути покращений шляхом використання адаптивного підходу, коли ширина підінтервалів змінюється в залежності від поведінки функції. Це дозволяє зменшити похибку і підвищити точність обчислень у випадках, коли функція має складну структуру на різних ділянках інтервалу інтегрування.

Було проведено 5 розрахунків визначеного інтегралу функції e^{-x^2} на інтервалі від -10 до 10 за допомогою чотирьох чисельних методів інтегрування, результати наведено в таблиці 1. Для кожного розхрахунку було використано різну кількість підінтервалів: 5, 10, 15, 20 та 25.

Таблиця 1. Результати обчислень визначеного інтегралу функції e^{-x^2}

Кількість підінтервалів	Метод лівих прямокутників	Метод правих прямокутників	Метод середніх прямокутників	Метод трапецій
5	0.14653	0.14653	4.00000	0.14653
10	2.07326	2.07326	1.47201	2.07326
15	1.75870	1.75870	1.78621	1.75870
20	1.77264	1.77264	1.77227	1.77264
25	1.77245	1.77245	1.77245	1.77245

Було проведено 10 розрахунків визначеного інтегралу функції $\cos(x^2)$ на інтервалі від -5 до 5 за допомогою чотирьох чисельних методів інтегрування, результати наведено в таблиці 2. Для кожного розхрахунку було використано різну кількість підінтервалів: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 та 50.

Таблиця 2. Результати обчислень визначеного інтегралу функції $\cos(x^2)$

Кількість підінтервалів	Метод лівих прямокутників	Метод правих прямокутників	Метод середніх прямокутників	Метод трапецій
5	0.49909	0.49909	-4.44521	0.49909
10	-1.97306	-1.97306	4.92018	-1.97306
15	3.31803	3.31803	-0.79946	3.31803
20	1.47356	1.47356	1.00547	1.47356
25	1.29368	1.29368	1.17188	1.29368
30	1.25928	1.25928	1.19977	1.25928
35	1.24625	1.24625	1.20911	1.24625
40	1.23951	1.23951	1.21353	1.23951
45	1.23545	1.23545	1.21603	1.23545
50	1.23278	1.23278	1.21761	1.23278

Висновки

У даній роботі були розглянуті та проаналізовані основні чисельні методи обчислення визначеного інтегралу: методи прямокутників (лівих, правих і середніх) та метод трапецій. Вони були застосовані для обчислення визначених інтегралів, які не можуть бути знайдені звичайними методами інтегрування для неперервної функції на різних інтервалах з різною кількістю підінтервалів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Шкіль М. І. Математичний аналіз частина перша / М. І. Шкіль — Київ : Вища школа, 2005. — 167 с.
2. Модульне навчання. Практикум з вищої математики частина перша / Ю. М. Бардучов [та ін.] — Херсон : Олді-Плюс, 2022. — 225 с.
3. Математичний аналіз у задачах і прикладах / Т. В. Колесник [та ін.] — Київ : Вища школа, 2002. — 227 с.

Самсонюк Олександр Васильович — студент факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: oleksandrsamsonuk907@gmail.com

Дубова Надія Борисівна — старший викладач кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua

Науковий керівник: ***Дубова Надія Борисівна*** — старший викладач кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua

Samsoniuk Oleksandr V. — student of the Faculty of Information Technology and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: oleksandrsamsonuk907@gmail.com

Dubova Nadiya B. — Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua

Supervisor**:** ***Dubova Nadiya B.*** — Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua