УДК 517.5

У.В. Гудима
В.О. Гнатюк

УМОВИ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ДОПУСТИМОГО ЕЛЕМЕНТА ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ТОЧКИ ШТЕЙНЕРА КІЛЬКОХ ЗАМКНЕНИХ КУЛЬ ДЕЯКОГО ПОЛІНОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Анотація
У роботі розглядаються умови колмогоровського типу екстремальності допустимого елемента задачі відшукання точки Штейнера кількох замкнених куль деякого полінормованого простору відносно множини цього простору.
Ключові слова: полінормований простір, точка Штейнера, хаусдорфова відстань, екстремальний елемент, умови екстремальності допустимого елемента.

Abstract
In article conditions of the extremality of admissible element for the problem of finding of generalized Steiner's point for the several closed balls in some polynormed space relatively the set of this space are established.
Keywords: the polynormed space, the Steiner’s point, the Hausdorff distance, the extremal element, the conditions of the extremality of admissible element.

Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел простір, $\|\cdot\|_i$, $i=\overline{1,m}$, – норми, задані на X, тобто $\left(X,\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ є полінормованим простором (див, наприклад, [1]).

Нехай, крім того, $B_{r_i}(a_i)=\left\{y\in X:\|y-a_i\|_i\le r_i\right\}$, $i=\overline{1,m}$, – замкнені кулі лінійних нормованих просторів $\left(X,\|\cdot\|_i\right)$ з центрами у точках $a_i\in X$ та радіусами $r_i\ge 0$; $V\subset X$; для $B_{r_i}(a_i)$ та $x\in V$

$$H_i\left(B_{r_i}(a_i),\{x\}\right)=\max\left\{\sup_{y\in B_{r_i}(a_i)}\inf_{x\in\{x\}}\|y-x\|_i,\sup_{x\in\{x\}}\inf_{y\in B_{r_i}(a_i)}\|x-y\|_i\right\} -$$

гаусдорфова відстань від $B_{r_i}(a_i)$ до $\{x\}$, $i=\overline{1,m}$.

Поставимо задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*\left(B_{r_i}(a_i), i=\overline{1,m}\right)=\inf_{x\in V}\sum_{i=1}^{m}H_i\left(B_{r_i}(a_i),\{x\}\right), \tag{1}$$

яку назвемо задачею відшукання узагальненої точки Штейнера замкнених куль $B_{r_i}(a_i)$, $i=\overline{1,m}$, полінормованого простору $\left(X,\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ відносно множини V цього простору.

Позначимо через $X^m,\|\cdot\|_{X^m}$, де $X^m=\{ x_1,...,x_m :x_i\in X, i=\overline{1,m}\}$, а $\| x_1,...,x_m \|_{X^m}=\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|_i$, $x_1,...,x_m \in X^m$, – лінійний нормований простір, який є прямим добутком лінійних нормованих просторів $X_i=\left(X,\|\cdot\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$; X_i^*, $i=\overline{1,m}$, – лінійні нормовані простори, спряжені з X_i;

$B_{X_i^*}=\left\{ f\in X_i^*:\|f\|_{X_i^*}=\sup\limits_{\substack{x\in X,\\ \|x\|_i\le 1}} f(x)\le 1\right\}$; $D=\{(x,\dots,x)\in X^m: x\in V\}$; $\Gamma^*(D,(x^*,\dots,x^*))$ – конус граничних напрямків для множини D з точки $(x^*,\dots,x^*)\in D$.

Теорема 1. Нехай $x^*\in V$. Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1), необхідно, щоб для кожного $y=(y_1,\dots,y_m)\in\Gamma^*(D,(x^*,\dots,x^*))$ існували функціонали $f_i^y\in B_{X_i^*}$, $i=\overline{1,m}$, такі, що

$$\|x^*-a_i\|_i=\max_{f\in B_{X_i^*}} f(x^*-a_i)=f_i^y(x^*-a_i),\ i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^m f_i^y(y_i)\ge 0.$$

Теорема 2. Нехай в задачі відшукання величини (1) $x^*\in V$. Якщо для будь-якого $x\in V$ існують функціонали $f_i^x\in B_{X_i^*}$, $i=\overline{1,m}$, такі, що

$$\|x^*-a_i\|_i=\max_{f\in B_{X_i^*}} f(x^*-a_i)=f_i^x(x^*-a_i),\ i=\overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^m f_i^x(x-x^*)\ge 0, \tag{3}$$

то x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорема 3. Нехай в задачі відшукання величини (1) $x^*\in V$ та D є Γ^*-множиною відносно $(x^*,\dots,x^*)$, тобто $(x,\dots,x)-(x^*,\dots,x^*)\in\Gamma^*(D,(x^*,\dots,x^*))$, $(x,\dots,x)\in D$.

Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x\in V$ існували функціонали $f_i^x\in B_{X_i^*}$, $i=\overline{1,m}$, для яких виконуються співвідношення (2), (3) теореми 2.

Наслідок 1. Нехай в задачі відшукання величини (1) $x^*\in V$ та V є Γ-множиною відносно $x^*\in V$ (зірковою відносно x^*, опуклою множиною). Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x\in V$ існували $f_i^x\in B_{X_i^*}$, $i=\overline{1,m}$, для яких виконуються співвідношення (2), (3) теореми 2.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гудима У.В. Умови екстремальності допустимого елемента для узагальненої задачі Штейнера в деякому полінормованому просторі/ Гудима У.В., Гнатюк В.О. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць /Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет мені Івана Огієнка. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022 – Вип.23. – С. 29-43.

Гудима Уляна Василівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, e-mail: hudyma_uliana@kpnu.edu.ua

Гнатюк Василь Олексійович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Hudyma Uliana V. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Mathematics, Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University, Kamianets-Podilskyi, e-mail: hudyma_uliana@kpnu.edu.ua

Gnatyuk Vasyl O. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Mathematics, Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University, Kamianets-Podilskyi