

ПРО ПЕРІОДИЧНІ БІЖУЧІ ХВИЛІ В ДИСКРЕТНИХ РІВНЯННЯХ ТИПУ КЛЕЙНА-ГОРДОНА З НЕЛОКАЛЬНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

¹Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Анотація

Одержано результат про існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона з нелокальною взаємодією. Для цього використано варіаційну техніку з використанням теореми про гірський перевал.

Ключові слова: дискретні рівняння типу Клейна-Гордона, періодичні біжучі хвилі, критичні точки, теорема про гірський перевал.

Abstract

The result of the existence of subsonic periodic traveling waves in the discrete Klein-Gordon type equations with nonlocal interaction is obtained. For this purpose, a variational technique using the mountain pass theorem was used.

Keywords: discrete Klein-Gordon type equations, periodic traveling waves, critical points, mountain pass theorem.

Дискретні рівняння типу Клейна-Гордона належать до широкого класу дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем. Такі рівняння описують динаміку нескінченних ланцюгів лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Важливими класами розв'язків таких рівнянь є біжучі і стоячі хвилі. В статтях [1-3; 6; 9; 11; 17-19] досліджено питання існування біжучих хвиль різних видів в рівняннях типу Клейна-Гордона з локальною взаємодією. В статтях [20; 21] досліджувалось питання існування стоячих хвиль в рівняннях типу Клейна-Гордона з локальною взаємодією. Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама з нелокальною взаємодією вивчалися в працях [4; 5; 12; 15]. Фізичні застосування дискретних рівнянь типу Клейна-Гордона досліджено в статтях [10; 14]. Неперервні рівняння Клейна-Гордона вивчалися в статтях [7; 8].

Будемо вивчати дискретні нелінійні рівняння типу Клейна-Гордона з нелокальною взаємодією:

$$\ddot{q}_n - \sum_{j=1}^l c_j [q_{n+j} + q_{n-j} - 2q_n] - dq_n + V'(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

де $q_n = q_n(t)$ – узагальнена координата n -го осцилятора в момент часу t . Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь та описують динаміку нескінченного ланцюга нелінійних осциляторів, кожен з яких лінійно взаємодіє з l своїми найближчими сусідами з кожного боку.

Будемо вивчати розв'язки системи (1) у вигляді біжучих хвиль

$$q_n(t) = u(n - ct), \quad (2)$$

де функція $u(s)$ називається профілем біжучої хвилі, а стала $c \neq 0$ – швидкістю. Підставляючи біжучу хвилю (2) в систему (1), одержуємо рівняння

$$c^2 u''(s) - \sum_{j=1}^l c_j [u(s+j) + u(s-j) - 2u(s)] - du(s) + V'(u(s)) = 0, \quad (3)$$

де $s = n - ct$.

Всюди далі припускається, що виконується умова:

(h) $V \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $V(0) = V'(0) = 0$, $V'(r) = o(r)$ при $r \rightarrow 0$ та існує таке $\mu > 2$, що $0 < \mu V(r) \leq V'(r)r$, $r \neq 0$.

Нехай

$$\Omega := \left\{ c > 0 \mid \min_{x \in \mathbb{R}} \left(c^2 x^2 - 4 \sum_{j=1}^l c_j \sin^2 \frac{x}{2} + d \right) \right\}.$$

Тоді величину

$$c_0 := \inf_{c > 0} \Omega$$

будемо називати *швидкістю звуку* в даній системі.

За допомогою методу критичних точок і теореми про гірський перевал (див. [16]) одержано такий результат:

Теорема 1. *Нехай виконується умова (h) і $c > c_0$. Тоді будь-якого $T > 0$ рівняння (3) має ненульовий T -періодичний розв'язок. Більше того, для досить великих значень періоду цей розв'язок не є сталим.*

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Bak S. Periodic traveling waves in the system of linearly coupled nonlinear oscillators on 2D lattice. *Archivum Mathematicum*. 2022. Vol. 58, № 1. P. 1-13.
2. Bak S. Periodic traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a twodi-dimensional lattice. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*. 2022. Vol. 91, № 3. P. 225-234.
3. Bak S. M. Periodic traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis*. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19-26.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Periodic traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2d-lattice. *Mat. Stud.* 2023. Vol. 60, № 2. P. 180-190.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2D-lattice. *Український математичний вісник*. 2024. Т. 21, № 1. С. 1-15.
6. Bak S. N., Pankov A. A. Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices. *J. Math. Sci.* 2011. Vol. 174, № 4. P. 916-920.
7. Bates P.W., Zhang C. Traveling pulses for the Klein-Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2006. Vol. 16, № 1. P. 235-252.
8. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.*, 2013. Vol. 33, №6. P. 2389-2401.
9. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys.* 2000. Vol. 211. P. 439-464.
10. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D*, 2006. Vol. 216. P. 327-345.
11. Makita P. D. Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices. *Nonlinear Analysis*. 2011. Vol. 74. P. 2071-2086.
12. Pankov A. Traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam chains with nonlocal interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2019. Vol. 12, № 7. P. 2097-2113.
13. Rabinowitz P. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. Providence, R. I.: American Math. Soc. 1986. 100 p.
14. Rapti Z. Multibreather stability in discrete Klein-Gordon equations: Beyond nearest neighbor interactions. *Physics Letters A*. 2013. Vol. 377. P. 1543-1553.
15. Wattis J. A. D. Approximations to solitary waves on lattices: III. The monoatomic lattice with secondneighbour interaction. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1996. Vol. 29. P. 8139-8157.
16. Willem M. *Minimax theorems*. Boston: Birkhäuser. 1996. 162 p.
17. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів. *Математичні студії*. 2006. Т. 26, № 2. С. 140-153.
18. Бак С.М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. Вип. 10. С. 17-23.
19. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія:

- Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. Вип. 12. С. 5-12.
20. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона із насичуваними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць.* 2021. Вип. 22. С. 5-19.
21. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона зі степеневими нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика та інформатика.* Том 39, № 2. 2021. С. 7-21.

Бак Сергій Миколайович — докт. фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, sergiy.bak@gmail.com

Bak Sergiy M. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Professor at the Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, sergiy.bak@gmail.com

Ковтонуєк Галина Миколаївна — канд. пед. наук, доцент кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, galyna.kovtonyuk@gmail.com

Kovtonyuk Galyna M. — Cand. Sc. (Ped.), Associate Professor, Associate Professor at the Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, galyna.kovtonyuk@gmail.com