

Особливості обчислення інтегралу Лебега від функцій, заданих на множині міри «нуль»

Вінницький національний технічний університет

Анотація. Викладено особливості наближеного обчислення інтегралу Лебега від функцій, заданих на множині міри «нуль», які обумовлені тим, що цей інтеграл являє собою суму добутків значень функції, що інтегрується, та міри Лебега кожного із цих значень. Враховано те, що ця міра є відрізком функціональної осі між монотонно-зростаючими значеннями функції, що інтегрується. Показано, як це реалізується в програмі обчислення інтеграла Лебега, складеної на мові Python.

Ключові слова: функція, що задана на множині міри «нуль», міра Лебега, інтеграл Лебега, програма обчислення інтегралу на мові Python.

Abstract. The paper presents the features of the approximate calculation of the Lebesgue integral from functions given on the set of measure zero. These features are due to the fact that the integral is the sum of the products of the values of the integrable function and the Lebesgue measure of each of these values. It is taken into account that the measure is a segment of the functional axis between the monotonically increasing values of the integrable function. The paper demonstrates the Python program for calculating the Lebesgue integral.

Keywords: function defined on a set of measure zero, Lebesgue measure, Lebesgue integral, Python program for the integral calculation.

Робота присвячена наближеним обчисленням інтегралу Лебега. Мета роботи полягає в тому, щоб висвітлити особливості інтегрування по мірі Лебега та продемонструвати, як враховуються ці особливості в програмі на мові Python наближеного обчислення інтегралу Лебега від функції, заданої на множині міри «нуль».

В роботі [1] показано, що інтегрування по Лебегу зводиться до обчислення суми

$$L = \lim_{\Delta_i y \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_{i-1} mE_i(y_{i-1} \leq y < y_i), \quad (1)$$

яка має усі властивості інтеграла при інтегруванні по координаті y на множині E з мірою

$$mE(m \leq y < M), \quad (2)$$

де m – дійсне число, що є мінімальним значенням функції $y = f(x)$, заданої на відрізку $[a, b]$ осі x на дискретній множині його точок, а M – максимальним значенням цієї функції на $[a, b]$. Але оскільки міра mE є монотонно-зростаючою функцією координати y від m до M то, позначивши її як $g(y)$, вираз (1) можна переписати у вигляді

$$L = \lim_{\Delta_i y \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_{i-1} (g(y_i) - g(y_{i-1})). \quad (3)$$

А тому і обчисленим наближено інтеграл Лебега може бути за виразом, аналогічним (3), тобто за виразом

$$L \approx \sum_{i=1}^n y_{i-1} (g(y_i) - g(y_{i-1})). \quad (4)$$

Але для реалізації програмно обчислень за виразом (4) необхідно спочатку відсортувати значення $y_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$ так, щоб їх послідовність була зростаючою, оскільки міра кожного з них $(g(y_i) - g(y_{i-1}))$ не може мати від'ємних значень. Як це реалізувати на практиці, покажемо в програмі, що викладена нижче.

Програма на мові Python для обчислення інтегралу Лебега від функції $f(x)$ дійсної змінної x , заданої на відрізку $[a, b]$ дискретно в точках через проміжок $x = \Delta x_i - x_{i-1} = c; \quad i = 1, 2, \dots, n:$

```

In [1]: import numpy as np
In [2]: a = a*; b = b*; Δx = c
In [3]: n = (b-a)/c
In [4]: x = np.linspace(a, b, n)
In [5]: def f(x):
        return тіло функції

In [6]: fvec = np.vectorize(f)
In [7]: f1 = fvec(x)
In [8]: M = max(f1)
In [9]: m = min(f1)
In [10]: mEf = M-m
In [11]: f11 = np.sort(f1)
In [12]: g = np.diff(f11)
In [13]: f111 = f11[:-1]
In [14]: l1 = f111*g
In [15]: L = np.sum(l1)

```

```

# Виклик ППП numpy під символом np
# Внесення числових даних  $a^*, b^*, c$ 
# Визначення потужності множини міри «нуль»
# Формування масиву значень  $x$ 
# Формування функції  $f(x)$ , що
    інтегрується по Лебегу
    на відріжку  $[a, b]$  значень аргументу  $x$ 
# Векторизація функції  $f(x)$ 
# Обчислення функції  $f(x)$  у вигляді списку  $f1$ 
# Визначення максимуму  $M$  функції  $f(x)$ 
# Визначення мінімуму  $m$  функції  $f(x)$ 
# Визначення міри  $M-m$  функції  $f(x)$ 
# Сортування по росту масиву  $f1$  в масив  $f11$ 
# Визначення перших різниць  $g$  функції  $f(x)$ 
# Видалення із  $f11$  останнього елемента
# Поелементне перемноження масивів  $f111$  і  $g$ 
# Обчислення інтегралу Лебега від  $f(x)$  на  $[a, b]$ 

```

В якості висновку констатуємо, що, скориставшись комп'ютерною програмою, наведеною вище, після занесення в неї у другому командному рядку граничних значень відрізка, на якому визначена множина значень міри «нуль» аргументу функції, що інтегрується за Лебегом, та значення проміжку між двома сусідніми значеннями цієї функції, а також після внесення тіла самої функції в п'ятий командний рядок, кожний із користувачів програми, запустивши її, визначить наближене значення інтеграла Лебега від заданої функції. Приклад обчислення за цією програмою наведено в роботі [2].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Мокін Б.І. Функціональний аналіз, адаптований до прикладних задач в галузі інформаційних технологій: навчальний посібник / Б.І. Мокін, В.Б. Мокін, О.Б. Мокін. – Вінниця: ВНТУ, 2020 – 192 с.
2. Мокін Б.І., Мокін О.Б., Шалагай Д.О. Про один із підходів наближеного обчислення інтегралів Стілтєсса і Лебега на мові Python в задачах системного аналізу з дискретними моделями. - *Вісник ВПІ*, 2021, №3 – С. 61-68.

Мокін Борис Іванович – академік НАПНУ, доктор технічних наук, професор, професор кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: borys.mokin@gmail.com

Мокін Віталій Борисович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Мокін Олександр Борисович – професор кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Шалагай Дмитро Олександрович – аспірант, Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Mokin Borys I. – Academician of NAPSU, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of System Analysis and Information Technologies, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: borys.mokin@gmail.com

Mokin Vitalii B. – Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of System Analysis and Information Technologies, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

Mokin Oleksandr B. – Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of System Analysis and Information Technologies, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

Shalagai Dmytro O. – Post-Graduate Student, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia