УДК 517.97

С. М. Бак[1]
Г. М. Ковтонюк[1]
Ю. В. Горбачова[1]

ІСНУВАННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ З ПЕРІОДИЧНОЮ АМПЛІТУДОЮ В ДИСКРЕТНОМУ РІВНЯННІ КЛЕЙНА-ҐОРДОНА З КУБІЧНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Анотація
Одержано результат про існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою в дискретному рівнянні Клейна-Ґордона з кубічною нелінійністю. Для цього використано варіаційну техніку з використанням теореми про зачеплення.
Ключові слова: дискретне рівняння Клейна-Ґордона, стоячі хвилі, періодична амплітуда, критичні точки, теорема про зачеплення.

Abstract
The result of the existence of standing waves with periodic amplitude in the discrete Klein-Gordon equation with cubic nonlinearity is obtained. For this purpose, a variational technique using the linking theorem was used.
Keywords: discrete Klein-Gordon equation, standing waves, critical points, linking theorem.

Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються для моделювання складних квантових і оптичних явищ. Серед таких систем найбільш відомими є системи типу Фермі–Пасти–Улама, дискретне нелінійні рівняння Шредінгера, дискретне рівняння Клейна-Ґордона.

Важливими класами розв'язків таких рівнянь є біжучі і стоячі хвиль. В статтях [1-3; 5-7; 9; 10] досліджено питання існування біжучих хвиль різних видів в рівняннях типу Клейна-Ґордона. В статтях [4; 12-14; 16-17] досліджувалось питання існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера. Питання існування і стійкості стоячих хвиль для рівнянь типу Клейна-Ґордона вивчалося в працях [8; 11; 18; 19].

Будемо вивчати дискретне нелінійне рівняння Клейна-Ґордона:

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n - f(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $q_n = q_n(t)$ – узагальнена координата n-го осцилятора в момент часу t, $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$ – одновимірний дискретний оператор Лапласа. Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

У цій статті ми будемо вивчати рівняння (1) із кубічною нелінінійністю:

$$f(r) = d_n |r|^2 r, \ \{d_n\} \subset \mathbb{R}.$$

Будемо шукати розв'язки системи (1) у вигляді стоячих хвиль

$$q_n(t) = u_n \exp(-i\omega t), \tag{2}$$

де $\{u_n\} \subset \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ – частотою. Підставляючи стоячу хвилю (2) в рівняння (1), одержуємо рівняння

$$-\Delta u_n - (\omega^2 - m^2) u_n = d_n |u_n|^2 u_n, \ \ n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Позначимо через $(Lu)_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1} u_{n-1} + b_n u_n$ і розглянемо більш загальне рівняння

$$(Lu)_n - \omega^2 u_n = d_n |u_n|^2 u_n, \ \ n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Всюди далі припускається, що виконується умова періодичності

(i) *існує таке* $N \in \mathbb{N}$, *що коефіцієнти* a_n, b_n *і* d_n *є* N*-періодичними, тобто* $a_{n+N} = a_n$, $b_{n+N} = b_n$ *і* $d_{n+N} = d_n$.

Зауважимо, що оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2. Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа відрізків (див. [15]). Доповнення $\mathbb{R} \setminus \sigma(L)$ складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються спектральними проміжками. Два з них напівскінченні. Якщо $N = 1$, то скінченні проміжки не існують. Однак, у загальному випадку скінченні проміжки існують і найбільш цікавий випадок, коли ω^2 належить скінченному проміжку.

Нехай

$$\omega^2 \in (a; b),$$

де (a, b) – довільний фіксований спектральний проміжок оператора L.

Будемо вивчати стоячі хвилі з періодичною амплітудою, тобто

$$u_{n+kN} = u_n, \tag{5}$$

де $k \in \mathbb{N}$ – фіксоване.

Позначимо через l_k^2 простір всіх kN-періодичних послідовностей. Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком

$$(u, v)_k = \sum_{(n,\, m) \in Q_k} u_{n,m} v_{n,m}$$

та нормою

$$\|u\|_k = \left(\sum_{(n,\, m) \in Q_k} \left| u_{n,m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де

$$Q_k = \left\{ (n, m) \in \mathbb{Z}^2 : -\left[\frac{kN}{2}\right] \le n,\, m \le kN - \left[\frac{kN}{2}\right] - 1 \right\},$$

і $\left[\frac{kN}{2}\right]$ – ціла частина $\frac{kN}{2}$.

На просторі l_k^2 розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\left(L_k u - \omega^2 u, u\right)_k - \frac{1}{4} \sum_{n \in Q_k} d_n u_n^4, \tag{6}$$

де L_k – оператор L, який діє в просторі l_k^2.

За зроблених припущень функціонал J_k належать класу C^1, а його похідна визначається формулою

$$\left\langle J_k'(u), h \right\rangle = \left(L_k u - \omega^2 u, h\right)_k - \sum_{n \in Q_k} d_n u_n^3 h_n, \; u, h \in l_k^2.$$

Крім того, критичні точки функціонале (6) є розв'язками рівняння (4) з простору l_k^2. Таким чином, рівняння (4) є рівнянням Ейлера-Лагранжа для функціоналу дії J_k у просторі l_k^2. Це рівняння завжди має нульовий розв'язок, тому нас цікавлять нетривіальні критичні точки даного функціоналу.

Виявляється, що функціонал J_k задовольняє умови теореми про зачеплення, а отже, має нетривіальні критичні точки. Звідси одержується основний результат статті:

Теорема 1. *Нехай виконується умова* (i), $d_n > 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a; b)$ *та* $b \ne +\infty$. *Тоді для будь-якого* $k \ge 1$ *рівняння (4) має нетривіальний* kN*-періодичний розв'язок* $u \in l_k^2$.

Оскільки спектр оператора $-\Delta + m^2$ є відрізком $\left[m^2, m^2 + 4\right]$, то з теореми 1 одержуємо наслідок:

Наслідок 1. *Нехай* $d_n > 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$ *та* $\omega^2 < m^2$. *Тоді для будь-якого* $k \ge 1$ *рівняння (3) має нетривіальний* kN*-періодичний розв'язок* $u \in l_k^2$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 217, № 2 (August). P. 187-197.
2. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine–Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2019. Vol. 52, № 2. P. 176-184.
3. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice. *Journal of mathematical physics, analysis, geometry*. 2018. Vol. 14, № 1. P. 16-26.
4. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
5. Bates P.W., Zhang C. Traveling pulses for the Klein-Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst*. 2006. Vol. 16, № 1. P. 235-252.
6. Braun O.M., Kivshar Y.S. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model. *Physics Repts*. 1998. Vol. 306. P. 1-108.
7. Braun O.M., Kivshar Y.S. The Frenkel-Kontorova model. Berlin: Springer, 2004. 427 p.
8. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.*, 2013. Vol. 33, №6. P. 2389-2401.
9. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D*, 2006. Vol. 216. P. 327-345.
10. Kreiner C. F., Zimmer J. Travelling wave solutions for the discrete sine–Gordon equation with nonlinear pair interaction. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*. 2009. Vol. 70, № 9. P. 3146–3158.
11. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 205-211.
12. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity*, 2006. Vol. 19. P. 27–40.
13. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrödinger equation, II: Generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Syst. A*. 2007. Vol. 19, № 2. P. 419–430.
14. Pankov A., Rothos V. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity. *Proc. Royal Society A*, 2008. Vol. 464. P. 3219–3236.
15. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. Providence, R. I. : American Math. Soc. 2000. 251 p.
16. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць, 2017. Вип. 16. С. 21-29.
17. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. *Математичні студії*, 2010. Т. 33, №1. С. 78–84.
18. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона із насичуваними нелінійностями. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць*. 2021. Вип. 22. С. 5-19.
19. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона зі степеневими нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика та інформатика.* Том 39, № 2. 2021. С. 7-21.

Бак Сергій Миколайович — докт. фіз.-мат. наук, професор кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Bak Sergiy M. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor of Department of Mathematics and Computer Science, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University

Ковтонюк Галина Миколаївна — канд. пед. наук, доцент кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Kovtonyuk Galyna M. — Cand. Sc. (Ped.), Associate Professor of Department of Mathematics and Computer Science, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University

Горбачова Юлія Вікторівна — студентка факультету математики, фізики і комп’ютерних наук, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Gorbachova Yuliya Viktorivna — student of the Faculty of Mathematics, Physics and Computer Science, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University