УДК 512.534.5

В.Д. Дереч

СТРУКТУРНО ОДНОРІДНА НАПІВГРУПА, ЯКА Є ІДЕАЛЬНИМ РОЗШИРЕННЯМ ГРУПИ ЗА ДОПОМОГОЮ НІЛЬНАПІВГРУПИ L

ВНТУ

Анотація

Ми конструюємо скінченну структурно однорідну напівгрупу, яка є ідеальним розширенням групи за допомогою нільнапівгрупи L (напівгрупа L задається у вигляді таблиці Келлі).

Ключові слова: структурно однорідна напівгрупа, інверсний моноїд, локальний автоморфізм.

Abstract

We construct a finite structurally uniform semigroup which is an ideal extension of the group by a nilsemigroup L (the semigroup L is given in the form of a Cayley table).

Keywords: structurally uniform semigroup, inverse monoid, local automorphism.

Нехай C − довільна математична структура. Ізоморфізм між двома її підструктурами називається **локальним автоморфізмом** структури C. Відомо, що множина всіх локальних автоморфізмів математичної структури C відносно операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд, який позначається через $LAut(C)$. Вивчення взаємозв'язків між властивостями структури C і властивостямиінверсного моноїда $LAut(C)$ є актуальною проблемою теорії інверсних напівгруп. Результати досліджень на цю тему можна знайти в багатьох статтях (див., наприклад, [1-8]). Зокрема в статті [6] наведено вичерпний список скінченних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є конгруенц-переставною напівгрупою. В статті [7] сконструйовані всі (з точністю до ізоморфізму) скінченні напівгрупи S, для яких інверсний моноїд $LAut(S)$ є дельта-напівгрупою. Ми продовжуємо дослідження на цю тему. Зазначимо такий факт (див. [6,7]): якщо інверсний моноїд $LAut(S)$ є конгруенц-переставним (або дельта-напівгрупою), то решітка ідеалів моноїда $LAut(S)$ є лінійно впорядкованою відносно включення. Відомо (див. [8]), що ідеали інверсного моноїда $LAut(S)$ утворюють ланцюг тоді і лише тоді, коли піднапівгрупи однакової висоти в решітці $Sub(S)$ є ізоморфними. Для подальшої зручності введемо таке означення: скінченна напівгрупа S називається **структурно однорідною,** якщо дві її піднапівгрупи однакової висоти в решітці $Sub(S)$ є ізоморфними. Автором з'ясовано (цей результат ще не опубліковано), що скінченна напівгрупа S є структурно-однорідною, якщо S є або групою, або нільнапівгрупою, або в'язкою, або розширеннм групи за допомогою нільнапівгрупи. В [9] наведено вичерпний список скінченних структурно однорідних груп. А саме:

ТЕОРЕМА 1. Скінченна група G є структурно однорідною тоді і лише тоді, коли G або циклічна група порядку p^n, де $p-$простечисло, або група кватерніонів Q_8, або елементарна Абелева група, або група Гайзенберга $Heis(Z_p)$, де $p-$просте непарне число.

В статті [8] наведено вичерпний список скінченних структурно-однорідних в'язок. А саме:

ТЕОРЕМА 2. Скінченна в'язка S є структурно однорідною тоді і лише тоді, коли S або лінійно впорядкована напіврешітка, або примітивна напіврешітка, або напівгрупа правих нулів, або напівгрупа лівих нулів.

Подальша наша мета – конструювання скінченних структурно однорідних напівгруп, кожна з яких є ідеальним розширенням групи за допомогою нільнапівгрупи. Слід зазначити, що загальна конструкція для побудови ідеального розширення групи за допомогою нільнапівгрупи дана в статті А.Кліфорда [10]. Проблема полягає в тому, щоб серед таких напівгруп виділити структурно однорідні напівгрупи. Важливу роль в наших дослідженнях відіграють наступні леми:

ЛЕМА 1. Нехай група G ($|G| \geq 2$) є ідеалом структурно-однорідної напівгрупи S. Якщо фактор–напівгрупа S/G (по конгруенції Ріса) є нетривіальною нільнапівгрупою, то група G є циклічною.

ЛЕМА 2. Нехай скінченна напівгрупа S є ідеальним розширенням групи G за допомогою нільнапівгрупи H. Якщо напівгрупа S є структурно однорідною, то фактор-напівгрупа S/G є структурно однорідною нільнапівгрупою.

Автору відомий повний список скінченних структурно однорідних нільнапівгруп (цей результат ще не опубліковано). Серед таких напівгруп є спорадична нільнапівгрупа L, яка задається таблицею Келі:

*	0	z	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0	0	0
z	0	0	0	0	0
x_1	0	0	0	z	0
x_2	0	0	0	0	z
x_3	0	0	z	0	0

В даному повідомленні ми конструюємо скінченну структурно однорідну напівгрупу, яка є ідеальним розширенням групи за допомогою нільнапівгрупи L. Нехай G -- циклічна група порядку p^n, де $p-$ просте непарне число. В групі G зафіксуємо твірний елемент a такий, що елемент a^2 теж є твірним елементом групи G. На множині $G \cup X$, де $X = \{x_1, x_2, x_3, z\}$, визначимо бінарну операцію $*$ наступним чином: на X операцію задаємо таблицею Келі:

*	x_1	x_2	x_3	z
x_1	a^2	z	a^2	a^3
x_2	a^2	a^2	z	a^3
x_3	z	a^2	a^2	a^3
z	a^3	a^3	a^3	a^4

Залишається визначити операцію множення елементів групи G на елементи множини X: якщо $x \in \{x_1, x_2, x_3\}$, то $a^k * x = x * a^k = a^{k+1}$, $a^k * z = z * a^k = a^{k+2}$ для будь-якого $a^k \in G$. (Зрозуміло, що на групі G бінарна операція $*$ збігається з заданою операцією на G).

Таким чином сконструйована напівгрупа на множині $G \cup X$ є ідеальним розширенням групи G за допомогою нільнапівгрупи L. Крім того вона є структурно однорідною.

Будь-яка скінченна структурно однорідна напівгрупа, яка є ідеальним розширенням групи G за допомогою нільнапівгрупи L має вищенаведену структуру.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ganyushkin, O., Mazorchuk, V.: On the structure of On. Semigroup Forum, **66**, 455-483 (2003)

2. Goberstein, S.M.: Inverse semigroups with certain types of partial automorphism monoids. Glasgow Math. J., **32**, 189-195$(1990)

3. Fernandes, V. H.: The monoid of all injective order preserving partial transformations on a finite chain. Semigroup Forum. **62**, 178-204(2001)

4. Dimitrova, I., Fernandes, V.H., Koppitz, J., Quinteiro, T.M.: Partial automorphisms and injective partial endomorphisms of a finite undirected path. Semigroup Forum.**103**, $87-105$ (2021)

5. Jajcay, R,, Jajcayova, T., Szakacs, N., Szendrei, M.: Inverse monoids of partial graph automorphisms. Journal of Algebraic Combinatorics **53**, 829-849(2021)

6. Derech, V.D.: Complete classification of finite semigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is a permutable semigroup. Ukr. Math. J., **68**, 1820-1828 (2017)

7. Derech, V.D.: Complete classification of finite semigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is a delta-semigroup. Semigroup Forum **102**, 397-407(2021)

8. Derech, V.D.: Structure of a finite commutative inverse semigroup and a finite bundle for which the inverse monoid of local automorphisms is permutable. Ukrainian Mathematical Journal, **63,** 1390-1399(2012)

9. Derech V.D.: Finite structurally uniform groups and commutative nilsemigroups. Ukr. Math. J., **70**, 1237-1251 (2019)

10. Clifford A.H.: Extensions of semigroups. Trans. Amer . Math. Soc., **68**, 165-173 (1950)

Дереч Володимир Дмитрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету, Вінниця, derech@vntu.edu.ua

Derech Volodymyr Dmytrovych, PhD in Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, derech@vntu.edu.ua