УДК 378.6:372.8

С. А. Кирилащук
З. В. Бондаренко
В. І. Клочко

Відображення деяких понять числового моделювання у курсі вищої математики

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У статті досліджено проблему оволодіння навичками числового моделювання студентами інженерних спеціальностей під час вивчення курсу вищої математики. Використовуючи СКМ, студент може абстрагуватися від технічних деталей програмування, особливостей операційної системи та зосередити увагу на аналізі числових методів, особливостях таких понять, як обумовленість задачі, стійкість методу, оцінка результатів розрахунків.
Ключові слова: *числове моделювання, вища математика, стійкість, оцінювання результатів.*

Abstract

The article investigates the problem of mastering the skills of numerical modeling by students of engineering specialties while studying the course of higher mathematics. Using SCM, the student can abstract from technical details of programming, features of operational system and to concentrate attention on the analysis of numerical methods, features of such concepts as conditionality of a problem(task), stability of a method, an estimation of results of calculations.
Keywords: *numerical modeling, higher mathematics, stability, evaluation of calculation results.*

Вступ

Широке впровадження математичних методів у різноманітні галузі інженерної діяльності передбачає в наявності певної математичної культури і високого рівня математичної підготовки фахівців інженерних спеціальностей. У свою чергу сучасний рівень розвитку науки і техніки освіти вимагає від фахівців постійного самостійного поповнювання знань, та, у разі необхідності, оволодіння новими галузями науки та дисциплінами, орієнтуватися в різноманітності наукових ідей і концепцій, а також застосовувати їх на практиці.

Серед професійних умінь, якими повинний володіти сучасний інженер, важливим є уміння за допомогою результатів експерименту, зокрема числового моделювання, вирішувати задачі аналізу, планування, а також уміння проводити прогностичні дослідження.

Числові методи відносяться до основних методів розв’язування задач як математики, так різних її застосувань. Числове моделювання характеризується скінченною послідовністю дій над числами, в результаті чого розв’язок отримуємо у вигляді чисел, із яких формуються таблиці, вектори, матриці тощо.

Результати дослідження

Оволодіння навичками числового моделювання сприяє розвитку логічного мислення студентів, підвищенню рівня вирішення проблем, що приймаються в умовах невизначеності, забезпеченню зростання рівня ефективної діяльності фахівця.

Серед обчислювальних функцій комп'ютерних математичних систем можна виділити числові обчислення (точні й наближені), символьні обчислення (такі, як обчислення невизначених інтегралів і т.п.), графічні (побудова різноманітних графіків на площині, у просторі й на поверхнях в аналітичному вигляді різними способами – явним рівнянням, неявним рівнянням, параметричними рівняннями тощо). Особливість точних числових обчислень за допомогою СКМ полягає в тому, що вони виконуються з будь-якою розрядністю чисел, а наближені обчислення – з будь-якою заданою точністю.

На основі фундаментального ядра курсу вищої математики формується зміст варіативної частини курсу, до якої відносяться питання, пов'язані з узагальненням понять (наприклад, фунціонал, норма), доведення сформульованих теорем, тлумачення понять, методи, алгоритми, тобто, питання, що характеризують математичне наповнення спеціальності.

При цьому часто виникає ситуація, коли вивчення деякого закону або явища з майбутньої спеціальності підштовхує до розвитку математичного апарату дослідника.

Аналіз досліджень науковців та галузевих стандартів [1, 2, 7, 9, 11] дозволив виділити базові, стосовно математики компетентності технічних спеціалістів: опанування новими математичними знаннями за допомогою сучасних освітніх та інформаційних технологій; володіння методами аналізу і синтезу вивчення явищ та процесів; здатність застосовувати на практиці, включаючи можливість побудови математичних моделей професійних задач і визначення шляхів їх вирішення, інтерпретувати отриманий математичний результат; здатність застосовувати аналітичні та числові методи вирішення завдань за допомогою СКМ; мати математичне мислення, математичну культуру в рамках професійної та людської культури; володіння власними способами обґрунтування тверджень як основного компоненту когнітивної й комунікативної функцій; володіння мовами деяких СКМ і вміння застосовувати їх до вирішення математичних задач; мати здатність до читання і аналізу навчально-наукової математичної літератури.

Тобто, вже на перших заняттях з математики слід систематично формувати компоненти математичних компетентностей майбутніх фахівців, що передбачає розуміння математичних концепцій, їх технічні аспекти та обмеження, вміння долати ці обмеження шляхом занурення результатів у ширші класи об'єктів, ставити та розв'язувати математичні задачі, здійснювати математичне моделювання.

Сучасний фахівець, адаптований до нових умов виробництва – це не просто, наприклад, конструктор, який вміє використовувати довідникові дані, результати експериментів та досліджень. Окрім того він повинен мати поняття та використовувати новітні технології, вміти користуватися базами даних і банками даних, узагальнювати світовий досвід. Але найголовнішим є те, що під час навчання у ЗВО фахівець повинен набувати рис творчої особистості, навичок дослідника, вміння оцінювати параметри і властивості створюваних технологій і систем, вміти подавати їх у вигляді моделей і грамотно використовувати весь арсенал моделей, методів і інструментів, що дозволяють перевірити і уточнити правильність обраних розрахункових схем конструктивних форм, матеріалів і технологій.

Одну із математичних та фахових компетентностей, здатність тлумачити отриманий математичний результат, можна формувати шляхом використання контрприкладів.

Однією із задач числових методів є знаходження розв'язку рівнянь $f(x)=0$ з необхідною або, принаймні, точністю, що оцінюється. Досвід роботи з першокурсниками показує, що вони не завжди чітко усвідомлюють, що означає знайти корінь рівняння заданої точності та необхідність його перевірки. За означенням, x_i є наближенням кореня рівняння $f(x)=0$ з точністю ε, якщо виконується умова $|x_i-\xi|<\varepsilon$, де ξ – точний корінь рівняння $f(x)=0$.

Проблема в тому, що точний корінь ξ невідомий (та й він переважно і не буде знайденим), тому й саму різницю $|x_i-\xi|<\varepsilon$ обчислити неможливо. У студентів, які вільно оперують числами, виникають запитання: “Що ж порівнювати?”, “Коли ж зупиняти процес знаходження кореня?”, “Чому найчастіше користуються обмеженнями $|x_i-x_{i-1}|<\varepsilon$, або $|f(x_i)|<\varepsilon$ для забезпечення заданої точності?”. Найпростіший шлях опанування студентами цієї проблематики – графічний (складові пошуку розв'язку задачі відрізки $[\xi, x_i]$, $[x_{i-1}, x_i]$, $|f(x_i)|$).

Така наочність допоможе з'ясувати незрозумілі питання і, опріч цього, дасть змогу обирати критерій зупинки процесу залежно від поведінки функції $f(x)$. Наприклад, для швидко зростаючої функції $f(x)$ умова $|f(x)|<\varepsilon$ не можлива).

Розглянемо приклад в якому розв'язується нелінійне рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ – неперервна функція. Пошук кореня x^*: $(f(x^*) \equiv 0$ закінчується за умови $|f(x_{k+1})| \le \varepsilon$, і приймається $x^* \approx x_{k+1}$. У такому випадку можлива поява помилкового кореня. Наприклад, для рівняння $x^2 + 0.00001 = 0$ помилковий корінь $x = 0$ з'явиться у тому випадку, якщо точність пошуку задана більшою, ніж 0,00001. За результатами розв'язання завдання студент набуває досвіду попереднього аналізу математичної моделі (рівняння має лише комплексні і лише спряжені корені). Можна позбутися помилкових коренів, збільшуючи точність пошуку ε (зменшуючи ε). Проте задля всіх рівнянь такий підхід не спрацьовує.

Наприклад, для рівняння $\frac{1}{x} = 0$, в якому для довільної, як завгодно малої точності, знайдеться x, що задовольняє критерію $|f(x_{k+1})| \le \varepsilon$: $\left|\frac{1}{x_{k+1}}\right| \le \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 0.00001$, то $x_{k+1} = 200000$, тобто знайдено число, що задовольняє заданий критерій точності пошуку розв'язку задачі.

Наведені приклади показують, що до результатів комп'ютерних обчислень необхідно завжди ставитися критично, аналізувати їх щодо правдоподібності. Щоб уникнути "підводних каменів" під час використанні будь-якого стандартного пакета, що реалізує числові методи, потрібно мати уявлення про те, який саме числовий метод реалізований для вирішення тієї чи іншої задачі. Наприклад, коли відомий інтервал, в якому розміщений корінь, то можна скористатися іншими методами уточнення кореня.

Нехай розглядається нелінійне рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ – неперервна функція. Згідно з методом Ріддера обчислюється значення функції в середині x_3 інтервалу локалізації кореня $[x_1, x_2]$ $x_3 = \frac{x_2 - x_1}{2}$. Далі знаходять експоненційну функцію e^Q із рівняння

$$f(x_1) - 2f(x_3)e^Q + f(x_2)e^{2Q} = 0.$$

На наступному кроці застосовується метод хорд, використавши значення $f(x_1)$, $f(x_3)e^Q$, $f(x_2)e^{2Q}$. Далі, обчислюється x_4 - наступне наближення кореня. Доцільно студентів знайомити з особливостями алгоритмів числового розв'язування тих чи інших задач за допомогою СКМ. Наприклад, згаданий вище алгоритм Ріддера у СКМ MathCAD реалізовано у вигляді алгоритма Ріддера і Брента функцією **root(f(var1, var2,...), var1, [a, b]).** На кінцях інтервалу [a,b] функція *f* повинна змінювати знак (***f(a)f(b)*<0**). Задавати початкові наближення для кореня не потрібно. Таким чином, процес формування компетентності включає знання про доступні допоміжні засоби та методи, а також їх потенціал, обмеження та можливість використовувати їх вдумливо та ефективно.

Поряд із задачами розв'язування рівнянь, значна кількість інженерних задач зводиться зрештою до наближеного розв'язування як конкретних рівнянь так і систем рівнянь, що описують поведінку об'єкта дослідження.

Ознайомимося також із іншими поняттями проблеми числового моделювання та відповідним оцінюванням процесу і результатів моделювання.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) $AX = B$ часто виникають із експериментів, пов'язаних математичним моделюванням в економіці, хімічній кінетиці, явищ деформацій, катастроф тощо. Коефіцієнти СЛАР отримуються з похибками, а в процесі обчислення виникають похибки округлення коефіцієнтів. Тому виникає важливе питання: як впливають похибки коефіцієнтів системи на розв'язок, тобто як впливає на результат задачі мінімальне збурення вхідних даних, як можна оцінити похибку розв'язку X по відношенню до змінювання матриць A і B? Стандартна похибка розв'язку за допомогою числа $C(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ – міри обумовленості матриці використовується для оцінювання характеристик матриці. Число $C(A)$лише визначає у скільки разів може зростати похибка розв'язку. Тут $\|A\|$ - норма матриці, що обчислюється за формулою

$$\|A\| = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Число обумовленості матриці обчислюємо за такою формулою:

$$C(A) = \frac{\Delta X \cdot \|B\|}{\Delta B \cdot \|X\|}.$$

Доцільно розглянути систему $AX = B$, задану матрицями $A = \begin{pmatrix} 0.0010 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Розв'язок отримати із заокругленням результатів обчислень до двох десяткових цифр.

У математиці та її застосуваннях часто доводиться мати справу з наближеними представленнями функцій. Для функцій, заданих у вигляді таблиць, це пов'язано з потребою отримати аналітичний вираз експериментально визначених характеристик, що можна виміряти безпосередньо. У випадку аналітично заданої функції часто потрібно замінити складний вираз на простіший так, щоб зберігались основні властивості функції. Зокрема, це необхідно при обчисленні функцій за допомогою відповідних засобів. Інша назва цієї задачі – апроксимування функції. Наближення функцій є важливим допоміжним апаратом при розв'язанні інших задач числового аналізу: числового інтегрування і диференціювання, розв'язання диференціальних рівнянь, розв'язання систем нелінійних рівнянь, задач оптимізації та ін. Під час вивчення теми, що стосується наближення функцій, необхідно ознайомити студентів не тільки з інтерполюванням, а й з іншими методами наближень, зокрема з середньоквадратичними наближеннями. Такий підхід має важливе методологічне значення, дає можливість розглянути ряд задач що до наближеного представлення функцій із загальних позицій. Конкретні методи наближень є окремими випадками загальної задачі. Такий підхід дає можливість здійснити міжпредметні зв'язки з курсом математичного аналізу.

Ще однією ознакою раціональної апроксимації числових методів є надійність. Не завжди існує раціональна функція певного виду, що задовольняє накладеним умовам інтерполяції. Надійний метод апроксимації в такому випадку має вказати, що задача не має розв′язку. Можливості числового алгоритму повинні розрізняти задачі які мають та ті, які не мають розв′язків з урахуванням похибок подання та округлення. Аналіз цього питання приводить нас до поняття стійкості алгоритму, яке тісно пов′язане з поняттям надійності. Алгоритм стійкий, якщо малі зміни початкових даних призводять до невеликих змін результату. Такий алгоритм раціональної інтерполяції надає можливість виокремити ті випадки, коли початкові дані призводять до нестійкого результату.

Доцільно розглянути приклад в якому серед усіх можливих траєкторій системи є траєкторії, що визначають якісну поведінку системи. Характер еволюції системи при малому відхиленні змінних системи від стаціонарних станів можна дослідити, аналізуючи систему диференціальних рівнянь в околі стаціонарної точки (рис. 1).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = sinx \end{cases}$$

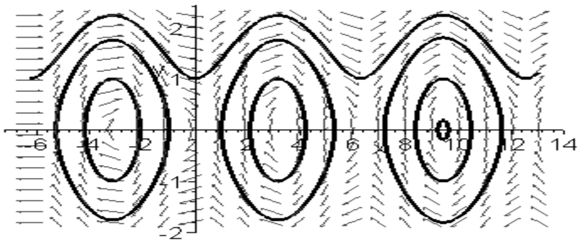

Рис. 1. Фазовий портрет системи диференціальних рівнянь

Важливо проаналізувати зміст загальних та частинних розв’язків. Зміст загального розв’язку (звичайно, на множині побудованих графіків) дозволяє з’ясувати особливості динаміки процесу, виявити його поведінку в околі деяких точок. Аналіз таких ситуацій дозволяє усвідомити студентам значення математичного моделювання. Так, графік частинного розв’язку (рис. 1) вказує на наявність значної кількості екстремумів, і в той же час графіки загального розв’язку інакше характеризують процес в околі деяких точок (точка max змінюється на точку min).

Висновки.

Широке впровадження математичних методів у найрізноманітніші сфери фахової діяльності людини потребує створення і використання інструмента математичного моделювання для розвязування обчислювальних задач. Сучасні числові методи в сукупності з можливістю їхньої автоматизації перетворюються в такий робочий інструмент для рішення задач наукового, технічного, економічного характеру й ін. Комп’ютерне моделювання у математиці переконливо доводить студентам, що математичні конструкції – це моделі реальних процесів. Таке переконання змінює відношення студентів до математики, навчання стає продуктивнішим. У студентів формуються мотиваційні чинники щодо опанування та поглиблення знань із різних галузей науки, зокрема можливістю оволодіння навичками використання СКМ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 – теорія і методика навчання інформатики / Сергій Анатолійович Раков ; Харківський нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди. – Харків, 2005. – 516 с.

2. Рамський Ю. С. Про роль математики і деякі тенденції розвитку математичної освіти в інформаційному суспільстві / Ю. С. Рамський, К. І. Рамська // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. – Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наукових праць / Редрада. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. – № 6 (13). – С. 12–16.

3. Михалевич В.М. Maple. Комп'ютерна підтримка курсу вищої математики в технічному вузі. Ч. 1. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Навч. посібник / В.М. Михалевич. – Вінниця: ВНТУ, 2004. – 111 с.

4. Alpers, B. (2014), A Mathematics Curriculum for a Practice-oriented Study Course in Mechanical Engineering, Aalen University, Aalen (download at http://sefi.htw-aalen.de).

5. Developing 21st Century Competencies in the Mathematics ClassroomYearbook 2016, Association of Mathematics Educators, Edited by: Pee ChoonToh (NTU, Singapore), Berinderjeet Kaur (NTU, Singapore)

6. Ministry of Education, Singapore (2010). MOE to enhance learning of 21st century competencies and strengthen art, music and physical education. Available at: www.moe.gov.sg

7. Partnership for 21st Century Learning, 2016. Framework for 21st Century Learning. Available at: www.p21.org.

8. PISA 2009 assessment framework – key competencies in reading, mathematics and science © OECD 2009

9. Turner,R., (2010) Exploring mathematical competencies. Available at: http://research.acer.edu.au/resdev/vol24/iss24/5

10. Бондаренко З. В. Розвиток математичної компоненти інженерно-професійних здібностей студентів ЗВТО / З. В.Бондаренко, В. І. Клочко, С. А. Кирилащук / Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини., 2019.-№2.- С.54- 61. http://znp.udpu.edu.ua/article/viewFile/168370/168154

11. Кирилащук С.А. Стратегія навчання вищої математики з метою розвитку інженерного мислення студентів / В. І. Клочко, С. А. Кирилащук/ Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології : зб. наук. пр. – 2012. – № 14. – С. 96-101.

12. Освіта в Європі у 2020-2030 роках. Прогноз. Точка доступу – http://www/pontydysgu.org/2010/01/crowdsourcingthe-turopeanforesight-study- your=chance-to-be-an-expert/

Кирилащук Світлана Анатоліївна – кандидат педагогічних наук, доцент, декан факультету інформаційних технологій і компютерної інженерії. Вінницький національний технічний університет, e-mail:ksa07750@gmail.com

Бондаренко Злата Василівна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, e-mail: zlatikbond@gmail.com

Клочко Віталій Іванович – доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри вищої математики. Вінницький національний технічний університет, e-mail:vi.klochko.7@gmail.com

Kirilashchuk Svetlana – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Dean of the Faculty of Information Technology and Computer Engineering . (Vinnytsia National Technical University) ksa07750@gmail.com

Bondarenko Zlata – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics. (Vinnytsia National Technical University) zlatikbond@gmail.com

Klochko Vitaliy - Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics. (Vinnytsia National Technical University) vi.klochko.7@gmail.com