УДК 372.851; 519.1

С. П. Гуцалюк[1]
А. М. Рашевська[2]
В. О. Шиян[2]

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРИКИ ТА МЕТОД ТРАЄКТОРІЙ

[1] Національний університет «Львівська політехніка»;
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Анотація

Розглядається метод траєкторій для розв'язування комбінаторних задач та доведення комбінаторних тотожностей. Обговорюються можливості метода як візуалізації комбінаторних задач.

Ключові слова: викладання математики, візуалізація, комбінаторика, метод траєкторій.

Abstract

The method of trajectories for solving combinatorial problems and proving combinatorial identities is considered. Possibilities of a method as visualization of combinatorial problems are discussed.

Keywords: teaching mathematics, visualization, combinatorics, trajectories method in combinatorics.

Вступ

Принцип наочності у сучасній методиці досить інтенсивно реалізовується різними засобами, особливо із впровадженням комп’ютерних технологій в освітній процес. Візуалізація навчального матеріалу та способи її досягнення відображені у багатьох працях науковців минулого і сучасності [5, 6]. Наочне моделювання, когнітивно-візуальний підхід, схематична наочність, логіко-смислове моделювання та інші напрями інтенсивно розвиваються багатьма дослідниками. Одним із методів, що використовується у комбінаториці та теорії ймовірностей, є метод траєкторій [2, 3]. Його перевагою над іншими методами є надзвичайна наочність. Названу перевагу можна використати для візуалізації комбінаторних задач та доведення комбінаторних тотожностей.

Метою роботи є розроблення методики використання методу траєкторій при вивченні комбінаторних тем математики. Зокрема, розглядаються доведення деяких комбінаторних тотожностей геометричним методом.

Результати дослідження

Геометрична ілюстрація біномних коефіцієнтів [2; 3] може слугувати наочністю при початковому вивченні комбінаторики. Зокрема, задачу «Людина блукає по місту» [2, стор. 121] доцільно використати для пропозиції учням підрахувати кількість комбінацій «вручну», а отже для формування розуміння багатозначності, «комбінаторності» ситуації, але все ж скінченності кількості варіантів вибору. Коли кожному варіанту вибору ставиться у відповідність ламана лінія, говорять, що задано траєкторію, що відповідає задачі. Тоді розв'язання комбінаторної задачі передбачає підрахування кількості таких траєкторій. Як правило, йдеться про число комбінацій C_n^k, саме ці числа ілюструються найкоротшими шляхами (траєкторіями, ламаними), що сполучають початок координат із точкою $(k; n-k)$ на площині. Згаданий метод дає можливість унаочнити ситуацію, описану задачею, і часто значно спрощує її розв'язання, зводячи його до геометричних міркувань. Саме геометричні міркування були запропоновані академіком Б.В. Гнєденком для вирішення ряду складних проблем математичної статистики. Ним же і було введено термін «метод траєкторій».

Метод траєкторій використовується для ілюстрації біномних коефіцієнтів та розв'язання задач типу задачі про шахове місто. Розглянемо геометричну ілюстрацію ще однієї задачі.

Задача [1, № 61, стор. 462]. Дві команди A і B грають серію матчів у баскетбол доти, поки одна з них не одержить чотири перемоги (нічиїх немає). Скільки різних серій таких матчів може бути?

Розв'язання. Кожній серії поставимо у відповідність траєкторію, що виходить з початку координат. Ланка ламаної іде вгору, якщо виграє команда A, і вправо при перемозі B (Рис.1).

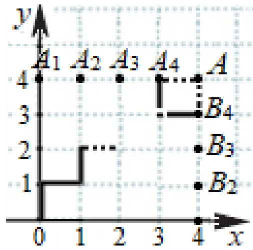


Рис. 1. Траєкторія до задачі про гру команд.

Очевидно, що довжина будь-якої траєкторії не перевищить 7. Жодна з них не досягне точки A (4; 4) – гра закінчиться, коли траєкторія вперше досягне або прямої $x = 4$, або прямої $y = 4$, тобто у будь-якій із точок A_i або B_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Враховуючи те, що кожну із траєкторій можна єдиним способом продовжити у точку A (4; 4), робимо висновок, що можливих траєкторій стільки ж, скільки тих, що входять у згадану точку, тобто $C_8^4 = 70$.

Геометричну ілюстрацію можна подати не тільки для біномних коефіцієнтів, а й для всіх інших структур [4]. Далі розглянемо застосування запропонованої в [4] геометричної ілюстрації перестановок з повтореннями для доведення деяких комбінаторних тотожностей. Спочатку опишемо згадану геометричну ілюстрацію.

Розглянемо у системі координат $Oxyz$ прямокутний паралелепіпед (Рис. 2, *a*) зі сторонами n_1, n_2 і n_3. Кількість найкоротших ламаних, що проходять ребрами координатної кубічної гратки від початку координат $O(0; 0; 0)$ до точки $A(n_1; n_2; n_3)$ можна порахувати такими міркуваннями. Кожна ламана містить $n_1 + n_2 + n_3 = n$ ланок, n_1 із яких є паралельними до осі Ox, n_2 паралельних до Oy, і n_3 – до Oz.

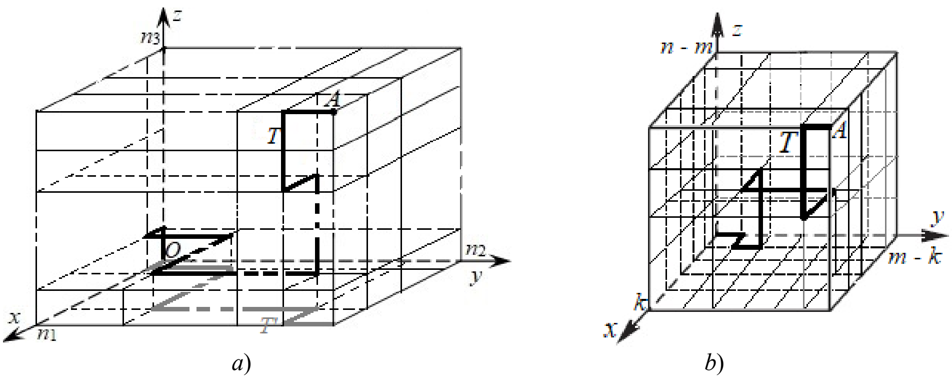
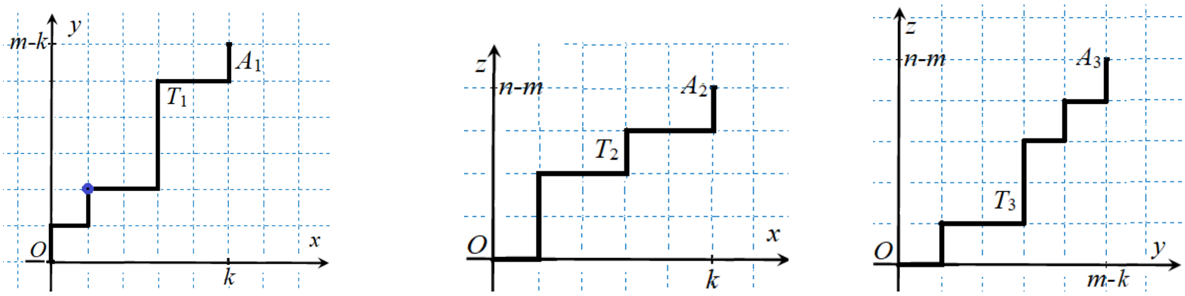


Рис. 2. Геометрична ілюстрація перестановок з повтореннями

Для побудови будь-якої з ламаних необхідно вказати місця n_1 ланок із n можливих для розташування відрізків, паралельних до Ox. Це можна здійснити $C_n^{n_1}$ способами. Вибрати n_2 місць із $n_2 + n_3 = n - n_1$, що залишилися, для розміщення ланок, що паралельні до осі Oy, можна $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами. А n_3 місця, що залишилися, використаємо для розміщення ланок, що пройдуть паралельно до осі Oz, однозначно ($C_{n-n_1-n_2}^{n_3} = C_{n_3}^{n_3} = 1$ способом) з'єднуючи вже побудовані відрізки ламаної. Всього таких ламаних за правилом добутку існує $C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} = P_n(n_1, n_2, n_3)$. Отже, $P_n(n_1, n_2, n_3)$ – це кількість найкоротших шляхів (траєкторій) із початку координат у точку $A(n_1; n_2; n_3)$. Одну з таких траєкторій T зображено на рисунку 2 *a*). Проекція T' траєкторії T на Oxy є траєкторією в описаному вище розумінні. Таких траєкторій, згідно з геометричним змістом біномних коефіцієнтів, існує $C_{n_1+n_2}^{n_1}$. В кожну із них проектується не одна просторова траєкторія. Підрахуємо кількість просторових траєкторій, що проектуються в T'. Остання складається із $n_1 + n_2$ ланок, отже у кожній із

$n_1 + n_2 + 1$ кінцевих точок просторова траєкторія T може відхилитись від своєї проекції T', і відхилення складе рівно n_3 ланок. Отже, для побудови траєкторії T необхідно вибрати n_3 місць із $n_1 + n_2 + 1$ можливих, допускаючи повторення (в будь-якій точці просторова траєкторія може віххилитись на 1, 2, 3, … n_3 ланок. Отже, таких відхилень існує $\overline{C}_{n_1+n_2+1}^{n_3} = C_{n_1+n_2+n_3}^{n_3} = C_n^{n_3}$, а просторових траєкторій – $C_{n_1+n_2}^{n_1} \cdot C_n^{n_3} = P_n(n_1, n_2, n_3)$. На цьому ж рисунку b) ілюструє число перестановок з повтореннями $P_n(k; m-k; n-m)$. Згідно із геометричним змістом перестановок із повтореннями, всього існує $P_n(k; m-k; n-m)$ траєкторій, що сполучають точку $A(k; m-k; n-m)$ з початком координат. Спроектувавши траєкторію, зображену на рисунку 2 b) на координатні осі, дістанемо траєкторії, зображені на рисунку 3 a) – c). Підрахуємо число траєкторій описаним вище способом.



a) *b*) *c*)

Рис. 3. Проекція просторової траєкторії на координатні площини

Проекцією T на Oxy є траєкторія T_1, що сполучає початок координат із точкою $A_1(k; m-k)$. Таких траєкторій існує C_m^k. На рисунку зображено точку, в якій T відхиляється від T_1. Оскільки вибрати точку відхилення просторової траєкторії можна $\overline{C}_{m+1}^{n-m} = C_n^{n-m} = C_n^m$ способами, то за правилом добутку всього існує $C_m^k \cdot C_n^m$ просторових траєкторій. Порахувавши кількість просторових траєкторій за допомогою проекцій на інші координатні осі, дістанемо: $Oxz: C_{n-m+k}^k \cdot \overline{C}_{n-m+k+1}^{m-k} = C_{n-m+k}^k \cdot C_n^{m-k}$; $Oyz: C_{m-k+n-m}^{m-k} \cdot \overline{C}_{m-k+1}^k = C_{n-k}^{m-k} \cdot C_n^k$. Таким чином маємо тотожність

$$C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot C_m^k = C_n^{m-k} \cdot C_{n-m+k}^k,$$

яка доведена у [2, стор. 58] теоретико-множинними міркуваннями, причому без третьої складової.

Якщо взяти $k = 1$, то підрахувавши кількість просторових траєкторій безпосередньо (Рис. 4) $P_n(1, m-1, n-m) = \dfrac{n!}{(m-1)!(n-m)!} = m \cdot C_n^m$ і за допомогою проекції на Oyz, $C_{n-1}^{m-1} \cdot \overline{C}_n^1 = n \cdot C_{n-1}^{m-1}$, дістанемо відому комбінаторну тотожність:

$$n \cdot C_{n-1}^{m-1} = m \cdot C_n^m.$$

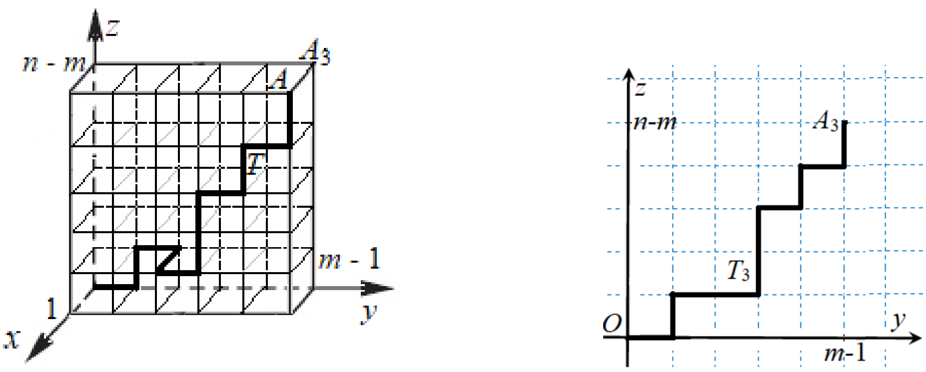


Рис. 4. Просторова траєкторія та її проекція

Розглянемо геометричну ілюстрацію до комбінаторної тотожності, також доведеної теоретико-множинними міркуваннями [2, стор. 58]. Підрахуємо кількість траєкторій, зображених на рисунку 5.

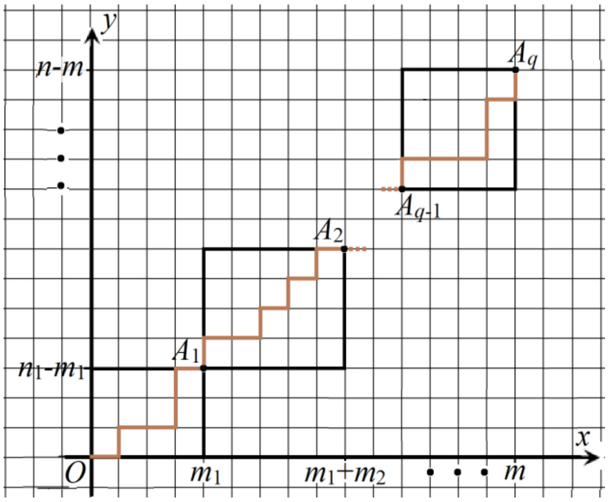


Рис. 5.

Згідно із геометричною інтерпретацією біномних коефіцієнтів, через точки A_{k-1} і A_k пройде $C_{n_k}^{m_k}$ траєкторій (Рис. 5). Тут $A_k(\sum_{p=1}^{k} m_p; \sum_{p=1}^{k}(n_p - m_p))$, $k = 1, 2, \ldots, q$; $q \geq 1$ – ціле число; $A_0 = O(0; 0)$, $A_q(m; n - m)$. За правилом добутку траєкторій, що проходять через точки A_0, $A_1, \ldots, A_q$ існує $C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_q}^{m_q}$. Якщо підрахувати кількість траєкторій за всіма можливими точками, координати яких задовольняють рівнянню $m_1 + m_2 + \ldots + m_q = m$, то за правилом добутку їх виявиться $\sum_{m_1+m_2+\ldots+m_q=m} C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_q}^{m_q}$. З іншого боку, траєкторій, що сполучають $O(0; 0)$ і $A(m; n - m)$, існує C_n^m. Прирівнявши отримані результати, дістанемо комбінаторну тотожність

$$\sum_{m_1+m_2+\ldots+m_q=m} C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_q}^{m_q} = C_n^m .$$

Якщо при початковому вивченні комбінаторики геометричні ілюстрації на зразок шахового містечка є скоріше наочністю, то подальше їх застосування, яке використовує метод траєкторій, є візуалізацією комбінаторних задач. Ефективним є метод траєкторій також у задачах теорії ймовірностей.

Висновки

Використання методу траєкторій досить ефективне як при вивченні комбінаторних тем курсу математики у середніх та вищих закладах освіти, так і при розв'язуванні комбінаторних задач. Перевагою методу траєкторій є надзвичайна його наочність. Метод може бути використаним як з метою наочності, так і з метою візуалізації комбінаторних структур.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко М.Ф. Комп'ютерна дискретна математика / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г Руткас. – Х. : «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.

2. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 328 с.

3. Ежов И.И. Элементы комбинаторики / И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – М.: Наука., 1977. – 80 с.

4. Рашевский Н. А. Метод траекторий в комбинаторике и теории вероятностей // Математическое образование. – 2019. – № 4(92). – С. 43-57.

5. Семеніхіна О. В. Принцип когнітивної візуалізації і його використання у навчанні математики / О. В. Семеніхіна, М. Г. Друшляк // Фізико-математична освіта. – 2017. – Вип. 3. – С. 136-140.

6. Штейнберг В.Э. От наглядности «по Коменскому» к дидактическим инструментам. // Образовательные технологии. – 2015. – № 3. – С. 65-84.

Гуцалюк Софія Павлівна — студентка Інституту комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Національний університет «Львівська політехніка», Львів, e-mail: vushnya.s01@gmail.com
Рашевська Анастасія Миколаївна — студентка Інституту високих технологій, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, e-mail: anr0202@gmail.com
Шиян Вікторія Олександрівна — студентка факультету інформаційних технологій, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, e-mail: viktoriya.shyyan@gmail.com

Науковий керівник: ***Рашевський Микола Олександрович*** — к. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики, Криворізький національний університет, м. Кривий Ріг, e-mail: mora290466@gmail.com

Hutsaliuk Sofiia P. — Institute of Computer Science and Information Technologies, National University “L’vivs’ka Politekhnika”, L’viv, email: vushnya.s01@gmail.com
Rashevska Anastasiya M. — Institute of Higher Technologies, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, email: anr0202@gmail.com
Shyian Viktoriia O. — Faculty of Information Technology, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, email: viktoriya.shyyan@gmail.com

Supervisor: ***Rashevs’kyi Mykola O.*** — Ph.D. (Math.), Assistant Professor of the Chair of Higher Mathematics, Kryvyi Rih National University, Kryvyi Rih, e-mail: mora290466@gmail.com.