УДК 5 - 51

Трофимчук М. А.

ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА ЕКСТРЕМУМ

Східноєвропейський національний університет імені Лесі України

Анотація

Запропоновано теоретичні відомості про основні методи та способи розв’язання геометричних задач на екстремум, а також показано на практиці їх застосування до конкретних прикладів.

Ключові слова: екстремум, оптимізація, метод, задача, цільова функція.

Abstract

Theoretical information on basic methods for solving geometric problems at the extremum is offered, as well as their practical application to specific examples.

Keywords: extremum, optimization, method, task, objective function.

Постановка проблеми

Сьогодні важливо знати, як, маючи певні ресурси, отримати найвищий життєвий рівень, найвищу продуктивність праці при найменших втратах, максимальному прибутку та мінімальній затраті часу. Формувати вміння відшукувати можливості вирішувати такі проблеми частково допоможуть геометричні задачі на екстремум, розв’язувати які можна починати при вивченні шкільного курсу математики, а саме під час вивчення теми «Похідна» для закріплення та застосування отриманих знань в повсякденному житті.

Мета дослідження

Розглянути основні методи розв'язування геометричних задач на екстремуми та показати на їх застосування на конкретних прикладах.

Результати дослідження

Ми пропонуємо розглянути окремі теми алгебри та геометрії у аспекті розв'язання задач на екстремум.

Квадратний тричлен. У багатьох задачах оптимізації цільовою функцією є квадратний тричлен. Розглянемо деякі загальні властивості квадратного тричлена, щоб застосувати їх до геометричних задач оптимізації.[1].

Теорема. Квадратний тричлен $y=ax^2+bx+c$ має найменше або найбільше значення, коли $x=-\frac{b}{2a}$.

Якщо $a>0$, то це значення найменше, якщо $a<0$, то воно найбільше.

Наслідок1. Функція $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$, $x \in P$, де P – деякий проміжок, що містить точку $x = -\frac{b}{2a}$, має найменше $(a>0)$, або найбільше $(a<0)$ значення, коли $x = -\frac{b}{2a}$.[3].

Задача 1. На території птахоферми для каченят потрібно відгородити металевою сіткою, довжина якої 200м, ділянку прямокутної форми, що прилягатиме до прямолінійної частини загальної огорожі ферми. Якими повинні бути розміри цієї ділянки, щоб вона мала найбільшу площу?[2, с.9 – 10].

Розв'язання. Нехай сторона ділянки, паралельна прямолінійній частині загальної огорожі ферми, дорівнює x м *(0<x<200)*. Тоді інша її сторона дорівнюватиме $\frac{200-x}{2}$ м, а площа ділянки $S= x\bullet\frac{200-x}{2}$ (м^2), тобто $S=-\frac{1}{2}x^2+100$ (м^2). За наслідком функція $S=-\frac{1}{2}x^2+100$, $x\in(0;200)$ набуває найбільшого значення, коли $x = 100$.

Отже, сторона ділянки, паралельна прямолінійній частині загальної огорожі ферми, повинна мати довжину 100 м, і тому її сторона, перпендикулярна до прямолінійної частини загальної огорожі ферми, повинна бути довжиною 50 м.

Середнє геометричне та середнє арифметичне.

Середнім арифметичним n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають число

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Середнім геометричним n додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають число

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

Теорема. Якщо $x_i>0(i=1,2,\ldots,n)$, то середнє геометричне довільного числа додатних чисел не перевищує їх середнього арифметичного:

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}\le\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Знак рівності тут має місце тоді і тільки тоді, коли всі числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дорівнюють одне одному :

$x_1= x_2\ldots=x_n$. [2, с. 15 – 16].

Наслідок 1. Добуток n додатних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сума яких стала і дорівнює А, має найбільше значення, що дорівнює $\left(\frac{A}{n}\right)^n$ тоді і тільки тоді, коли $x_1= x_2\ldots=x_n=\frac{A}{n}$.

Наслідок 2. Сума n додатних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, добуток яких сталий і дорівнює P, має найменше значення , що дорівнює $n\sqrt[n]{P}$, тоді і тільки тоді, коли $x_1= x_2\ldots=x_n=\sqrt[n]{P}$.

Задача 2. Серед усіх трикутників даної площі S знайдіть трикутник найменшого периметра.

Розв'язання. Нехай a, b, c – довжини сторін одного з розглядуваних трикутників. Згідно з формулою Герона маємо:

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)},$$

що дає $16\,S^2=(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)$.

Неважко переконатися в справедливості рівності:

$$a+b+c=\frac{3}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}+\frac{b+c-a}{1}+\frac{a+c-b}{1}+\frac{a+b-c}{1}\right).$$

Доданки виразу, що стоїть в останніх дужках, додатні, а на основі співвідношення 16 $S^2=(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)$ їх добуток сталий (дорівнює $\left(\frac{16S^2}{3}\right)$. Тому за наслідком 2 сума $a+b+c$, буде найменшою, якщо виконується умова: $\frac{a+b+c}{3}=\frac{b+c-a}{1}=\frac{a+c-b}{1}=\frac{a+b-c}{1}$, що рівносильно рівностям $a=b=c$.[5].

Отже, шуканий трикутник – рівносторонній.

Геометрія трикутника і задачі оптимізації.

Однією з важливих теорем геометрії трикутника є теорема Чеви.

Теорема Чеви. Якщо точки C_1, A_1, B_1 розміщені відповідно на сторонах AB, BC, CA трикутника ABC так, що

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

то всі три відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Зрозуміло, що ця точка лежить всередині розглядуваного трикутника.

Наслідок 1. Всі три медіани трикутника перетинаються в одній точці.

Наслідок 2. Всі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.[2, с.15].

Задача 1. Знайдіть всередині трикутника ABC таку точку M, щоб добуток $AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1$, де A_1, B_1, C_1 – точки перетину променів AM, BM, CM відповідно із сторонами BC, AC і CB, мав найбільше значення.

Розв'язання. За теоремою про середнє геометричне маємо такі оцінки:

$$\sqrt{AC_1\cdot C_1B}\le\frac{AC_1+C_1B}{2}=\frac{AB}{2},\qquad \sqrt{CB_1\cdot B_1A}\le\frac{CB_1+B_1A}{2}=\frac{AC}{2},$$

скориставшись якими отримуємо:

$$AC_1\cdot C_1B\cdot BA_1\cdot A_1C\cdot CB_1\cdot B_1A\le\left(\frac{AB}{2}\cdot\frac{BC}{2}\cdot\frac{AC}{2}\right)^2.$$

Оскільки за теоремою Чеви $C_1B\cdot A_1C\cdot B_1A=AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1$, то останню рівність можна переписати так:

$$AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1=\frac{AB}{2}\cdot\frac{BC}{2}\cdot\frac{AC}{2}.$$

Це співвідношення буде рівністю, якщо точки A_1, B_1, C_1 будуть серединами відповідно сторін AB, BC і AC, тобто за умови, що точка M буде точкою перетину медіан трикутника ABC. У цьому випадку добуток $AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1$ набуває найбільшого значення, яке дорівнює $\frac{1}{8}abc$, де a, b, c – довжини сторін трикутника ABC.[4].

Висновки. У ході даного дослідження було розглянуто методи розв’язування геометричних задач на екстремум з допомогою наведених математичних фактів, теорем з шкільного курсу математики та показано їх застосування до розв’язання задач школярами на конкретних прикладах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1.Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник/ Мирослав Жалдак//Черкаси : Брама-України. – 2005 – С.15 – 18.

2.Вивальнюк Л. М., Соколенко О. І., Костарчук Ю. В. Задачі оптимізації: Посібник для факультативних занять 10 – 11 кл./Лука Вивальнюк, Олександр Соколенко, Юрій Вікторович// К.: Радянська школа. –1991. – С.5 – 25.

3. Сухарьов А. Г., Тихомов В. М., Федоров В. В. Курс методів оптимізації//Москва: Фізматліт. – 2005. – 368с.

4. Васильєв Ф. П. Методи оптимізації//Москва: МЦНМО. – 2011. – 624с.

5. Гілл Ф., Мюррей У., Райт М. Практична оптимізація.// Пер. з анг. – М.: Мир. – 1985. – С.12 – 13.

Трофимчук Марія Анатоліївна – студентка групи матем 42-О, факультету інформаційних технологій і математики, Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, e-mail: marrytr17@gmail.com.

Науковий керівник: ***Кравчук Ольга Мусіївна*** – канд. пед. наук, доцент кафедри алгебри та математичного аналізу, Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк.

Trofimchuk Maria A. – Faculty of Information Technology and Mathematics, Eastern European National University named after Lesia Ukrainka, e-mail: marrytr17@gmail.com.

Supervisor: ***Kravchuk Olga M.*** – Dr. Sc., Associate Professor of Algebra and Mathematical Analysis, Eastern European National University named after Lesia Ukrainka, Lutsk.