УДК 517.97

С. М. Бак

МЕТОД УМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ В ЗАДАЧІ ПРО ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ В СИСТЕМАХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Анотація

Одержано результат про існування періодичних розв'язків в системі лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Показано, що періодичні розв'язки можуть бути побудовані за допомогою методу умовної мінімізації.

Ключові слова: нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, періодичні розв'язки, метод умовної мінімізації.

Abstract

It is obtained result on the existence of periodic solutions in a system of linearly coupled nonlinear oscillators on 2D-lattice. It is shown that periodic solutions can be constructed using the constrained minimization method.

Keywords: nonlinear oscillators, 2D-lattice, periodic solutions, constrained minimization method..

Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються для моделювання складних оптичних і квантових явищ. Серед таких систем найбільш відомими є системи осциляторів, дискретні рівняння типу синус-Ґордона, системи типу Фермі–Пасти–Улама, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. В статтях [1; 3; 4; 5; 14; 18] вивчались біжучі хвилі для систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках. В статтях [2; 15] одержано результати про існування біжучих хвиль для нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. А в статтях [12; 17] вивчались стоячі хвилі в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці. В статтях [7; 10; 11; 13] вивчалось питання коректності задачі Коші для систем осциляторів на двовимірній ґратці.

В статтях [8; 9; 19] досліджено питання існування періодичних розв'язків для систем осциляторів на одновимірній ґратці, а статтях [6; 21] – на двовимірній ґратці.

Вивчаються рівняння, які описують динаміку зчисленної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m} = q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n,m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}\left(q_{n-1,m} - q_{n,m}\right) - a_{n,m}\left(q_{n,m} - q_{n+1,m}\right) + b_{n,m-1}\left(q_{n,m-1} - q_{n,m}\right) - \\ - b_{n,m}\left(q_{n,m} - q_{n,m+1}\right) - U'_{n,m}\left(q_{n,m}\right),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \tag{2}$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Потенціал $U_{n,m}(r)$ запишемо у вигляді $U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2}r^2 + V_{n,m}(r)$ і покладемо $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$. Тоді система (1) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + \\ + c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q)\,, \tag{4}$$

де

$$\left(Aq\right)_{n,\,m} = a_{n-1,\,m}q_{n-1,\,m} + a_{n,\,m}q_{n+1,\,m} + b_{n,\,m-1}q_{n,\,m-1} + b_{n,\,m}q_{n,\,m+1} + c_{n,\,m}q_{n,\,m}\,,$$

а нелінійний оператор B визначається формулою

$$\left(B(q)\right)_{n,\,m} = V'_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right), \tag{5}$$

в просторі $l^2 = l^2\left(\mathbb{Z}^2\right)$ дійсних послідовностей $q = \left(q_{n,\,m}\right)$ зі скалярним добутком

$$\left(q^{(1)},\, q^{(2)}\right) = \sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2} q^{(1)}_{n,\,m}\, q^{(2)}_{n,\,m}\,.$$

Розглянемо систему (3) зі степеневими потенціалами вигляду

$$V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p}|r|^p\,, \tag{6}$$

де $g_{n,m} > 0,\ p > 2$. У цьому випадку система (3) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{n,\,m} = a_{n-1,\,m}q_{n-1,\,m} + a_{n,\,m}q_{n+1,\,m} + b_{n,\,m-1}q_{n,\,m-1} + b_{n,\,m}q_{n,\,m+1} + \\ + c_{n,\,m}q_{n,\,m} - g_{n,\,m}\left|q_{n,\,m}\right|^{p-2} q_{n,\,m},\ \left(n,\,m\right)\in\mathbb{Z}^2.\end{aligned} \tag{7}$$

Передбачається, що послідовності $\left\{a_{n,m}\right\}$, $\left\{b_{n,m}\right\}$, $\left\{d_{n,m}\right\}$ і $\left\{g_{n,m}\right\}$ просторово періодичні (по n і m) з деяким натуральним періодом N. При цьому систему (7) також можна розглядати у просторі $l^2 = l^2\left(\mathbb{Z}^2\right)$ як диференціально-операторне рівняння вигляду (4) з обмеженим неперервним нелінійним оператором

$$\left(B(q)\right)_{n,m} = g_{n,m}\left|q_{n,m}\right|^{p-2} q_{n,m}.$$

Передбачається, що виконується наступна умова:

(P) *Оператор A додатно визначений, тобто існує таке $\alpha_0 > 0$, що*

$$\left(Aq,\, q\right) \ge \alpha_0 \left\|q\right\|^2.$$

Нехай $T > 0$. Позначимо через X_T підпростір T-періодичних функцій із $H^1_{loc}\left(\mathbb{R};\, l^2\right)$. Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$\left(q,\, p\right)_T = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\left(\dot{q}(t),\, \dot{p}(t)\right) + \left(q(t),\, p(t)\right)\right] dt\,.$$

З системою (7) пов’язується функціонал

$$\Phi(u) = \int_{-T/2}^{T/2} \left\{\frac{1}{2}\left\|\dot{u}(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left(Au(t),\, u(t)\right) - \frac{1}{p}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m}\left|u_{n,m}(t)\right|^p\right\} dt. \tag{8}$$

Функціонал Φ неперервно диференційовний за Фреше (а отже, і за Гато) і

$$\left\langle \Phi'(u),\, v\right\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\left(\dot{u}(t),\, \dot{v}(t)\right) + \left(Au(t),\, v(t)\right) - \left(B\left(u(t)\right),\, v(t)\right)\right] dt, \tag{9}$$

для будь-якого $v \in X_T$. Критичні точки функціоналу Φ в просторі X_T є шуканими розв’язками.

Подамо функціонал Φ у вигляді

$$\Phi(u) = \Psi(u) - S(u)\,,$$

де

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \left[\left\|\dot{u}(t)\right\|^2 + \left(Au(t),\, u(t)\right)\right] dt,$$

$$S(u) = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\left[\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m}\left|u_{n,m}(t)\right|^p\right]dt.$$

Далі ми використаємо підхід, що ґрунтується на наступній задачі мінімізації з обмеженнями. Для будь-якого $\theta > 0$ розглянемо задачу мінімізації

$$I_\theta = \inf\left\{\Psi(v) : v \in X_T,\, S(v) = \theta\right\}. \qquad (10)$$

Теорема 1. *Нехай* u *– розв'язок задачі (10). Тоді* $q = \lambda^{\frac{1}{p-2}}u$ *є* T *-періодичним розв'язком задачі (7), (2).*

Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 2. *В зроблених припущеннях для будь-якого* $T > 0$ *задача (10) має розв'язок* $u \in X_T$*. Більше того, існує таке* $T_0 > 0$*, що при* $T \ge T_0$ *цей розв'язок не є сталим.*

Таким чином, у цій статті одержано результат про існування періодичних розв'язків в системі нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці, які можна побудувати за допомогою методу умовної мінімізації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бак С. Н., Панков А. А. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник*. 2010. Т. 7, №2. С. 154–175.
2. Бак С.М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці. *Український математичний журнал*. 2017. Т. 69, №4. С. 435-444.
3. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57, №3. С. 45–52.
4. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. Вип. 10. С. 17-23.
5. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. Вип. 12. С. 5-12.
6. Бак С.М. Існування періодичних за часом розв'язків системи осциляторів на двовимірній гратці. *Карпатські математичні публікації*. 2012. Т. 4, №2. С. 175-196.
7. Бак С.М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. 2011. Вип. 5. С. 3-9.
8. Бак С. Н. Метод условной минимизации в задаче о колебаниях цепочки нелинейных осцилляторов. *Математическая физика, анализ, геометрия*. 2004. Т. 11, № 3. С. 263–273.
9. Бак С. Н., Панков А. А. О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов. *Доповіді НАН України.* 2004. № 9. С.13–16.
10. Бак С. М. Про обмеженість глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. 2019. Вип. 20. С. 5-12.
11. Бак С. М., Баранова О. О., Білик Ю. П. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. 2010. Вип. 4. С. 18-24.
12. Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. 2018. Вип. 18. С. 5-13.
13. Бак С. М., Рум'янцева К. Є. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. 2012. Вип. 6. С. 29-36.
14. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 217, №2 (August). P. 187–197.
15. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice. *Ukrainian mathematical Journal*. 2017. Vol. 4 (69). P.509-520.
16. Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Український математичний вісник*. 2019. Т.16, №4. С. 465-476.
17. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
18. Feckan M., Rothos V. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions. *Nonlinearity.* 2007. Vol. 20. P. 319–341.

19. MacKay R. S., Aubry S. Proof of existence of breathers for time–reversible a Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators. *Nonlinearity*. 1994. Vol. 7. P. 1623–1643.
20. Rabinowitz P. Minimax methods in criticsl point theory with applications to differential equations. Providence: Amer. Math. Soc., 1986. 100 p.
21. Srikanth P. On periodic motions of two–dimensional lattices. *Functional analysis with current applications in science, technology and industry*. 1998. Vol. 377. P. 118–122.

Бак Сергій Миколайович — канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Bak Sergiy M. — Cand. Sc. (Eng), Associate Professor of Department of Mathematics and Computer Science, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University