

## РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ ПРИ ПРИЙНЯТТІ РІШЕНЬ

Вінницький національний технічний університет

### Анотація

*В ході проведених досліджень відзначено актуальність створення програмної реалізації методу аналізу ієрархій для прийняття рішень. Наведено приклад роботи методу та практично реалізовано його на мові програмування Python.*

**Ключові слова:** метод аналізу ієрархій, альтернатива, власний вектор, вектор пріоритетів.

### Abstract

*In the course of the conducted researches the urgency of creation of program realization analytic hierarchy process for decision-making is noted. An example of the method is given and it is practically implemented in the Python programming language.*

**Keywords:** analytic hierarchy process, alternative, eigenvector, priorities vector.

### Вступ

Одним із напрямків роботи системного аналітика є формулювання гіпотез та наукових задач в області системного аналізу, спираючись на наявні математичні моделі та методи прийняття рішення. При прийнятті рішень і прогнозуванні можливих результатів системний аналітик доволі часто зустрічається з множиною взаємопов'язаних компонент, яку потрібно проаналізувати. Складність полягає в опрацюванні великого обсягу вхідних даних. Актуальним стає створення інформаційно-вимірjuвальних систем підтримки прийняття рішення.

Метою нашої роботи є практичне застосування програмної реалізації математичного апарату методу аналізу ієрархій для прийняття рішення.

### Основна частина

Метод аналізу ієрархій (МАІ) – математичний метод, який був розроблений американським ученим Томасом Сааті як інструмент системного підходу для вирішення проблем прийняття рішень, що активно застосовується не тільки для порівняння об'єктів, але й для більш складних проблем управління, прогнозування, тощо. Даний метод дає змогу виокремити структурні елементи задачі прийняття рішень та формалізувати зв'язки між ними; визначити системи переваг особи, що приймає рішення (ОПР), та критеріїв, за якими оцінюють альтернативи; синтезувати правило прийняття рішень, яке ґрунтується на перевагах одних альтернатив у порівнянні з іншими [1-2]. Він знайшов застосування для вирішення проблем в економіці, промисловості, торгівлі, при стратегічному плануванні, проектуванні цін тощо.

Основна ідея методу полягає в тому, щоб структурувати задачу прийняття рішень на основі багатокритеріальної ієрархії. Ієрархія є деякою абстракцією структури системи, яка полегшує вивчення функціональних взаємодій її компонентів та їх впливів на систему в цілому [3].

Основною перевагою методу аналізу ієрархій є висока універсальність – метод може використовуватися для вирішення найрізноманітніших задач: аналізу можливих сценаріїв розвитку ситуації, розподілення ресурсів, створення рейтингу клієнтів, прийняття кадрових рішень, тощо.

Недоліком методу є те, що необхідно отримати великий обсяг інформації від експертів [3].

Математичні основи методу Сааті – використання власного вектора матриці попарних порівнянь як вектора пріоритетів, дозволяють застосовувати цей метод для вирішення проблематичних завдань з вибору оптимальної альтернативи. Наведемо приклад вирішення проблематичного завдання вибору.

*Постановка задачі.* Пересічній людині на карантині необхідно обрати чим зайнятися в цей період. Критерії, які було враховано:  $Q_1$  – витрачений час,  $Q_2$  – зацікавленість,  $Q_3$  – задоволеність,  $Q_4$  – доцільність,  $Q_5$  – ресурсозатратність,  $Q_6$  – користь. Будуємо матрицю попарних порівнянь критеріїв (таблиця 1). Порівнюючи попарно 6 видів занять **A, B, C, D, E, F** (де **A** – прочитати серію книг, **B** – вивчити англійську мову, **C** – зібрати величезний пазл, **D** – зайнятися спортом, **E** – записатися на курси по саморозвитку, **F** – створити YouTube канал та вивчити IT-технології), за кожним критерієм отримуємо 8 матриць. Для порівняння альтернатив і критеріїв користуємося шкалою відносної важливості MAI, яка в нашій програмі виводиться на екран користувачеві щоразу коли він їх порівнює (рис 1).

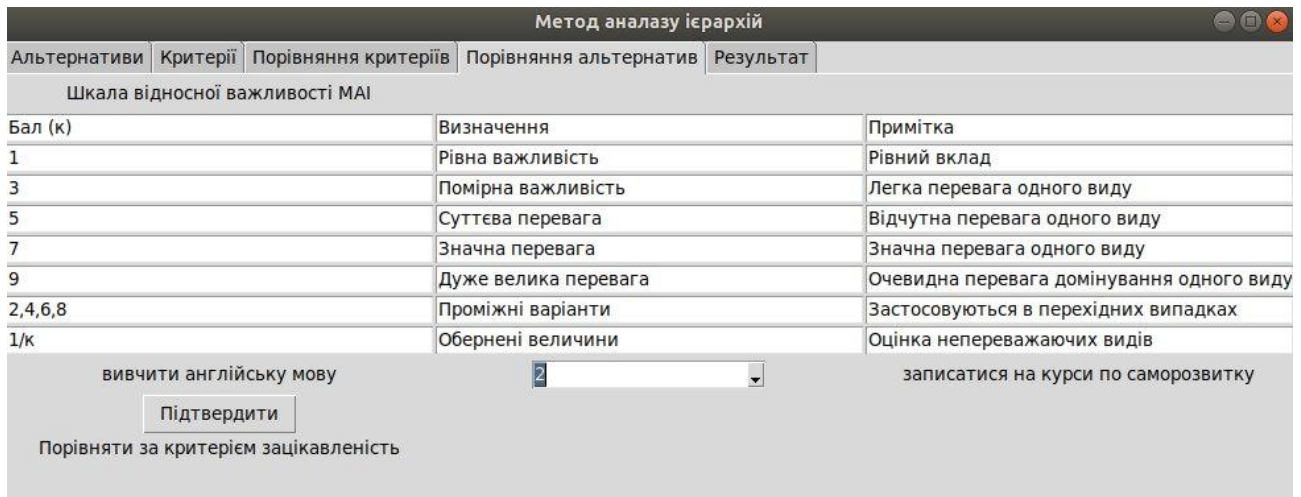


Рис. 1. Зразок роботи програми на етапі порівняння альтернатив

Матриці попарних порівнянь заповнюються парами елементів, симетричних відносно головної діагоналі, що відображають кожне твердження експерта. Оскільки об'єкт є рівноважливим сам до себе, то на головній діагоналі такої матриці 1. Значення елементів обираємо відповідно до шкали відносної важливості MAI (наприклад, заняття A помірно переважає заняття B – 3 і 1/3).

Таблиця 1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

|       | $Q_1$ | $Q_2$ | $Q_3$ | $Q_4$ | $Q_5$ | $Q_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Q_1$ | 1,00  | 0,25  | 0,25  | 0,25  | 0,20  | 2,00  |
| $Q_2$ | 4,00  | 1,00  | 0,20  | 3,00  | 3,00  | 0,50  |
| $Q_3$ | 4,00  | 5,00  | 1,00  | 3,00  | 3,00  | 4,00  |
| $Q_4$ | 4,00  | 0,33  | 0,33  | 1,00  | 0,33  | 0,33  |
| $Q_5$ | 5,00  | 0,33  | 0,33  | 3,00  | 1,00  | 0,25  |
| $Q_6$ | 2,00  | 2,00  | 0,25  | 3,00  | 4,00  | 1,00  |

Таблиця 2 – Матриця попарних порівнянь альтернатив A, B, C, D, E, F за критеріями

| $Q_1$ | A    | B    | C    | D    | E    | F    | $Q_2$ | A    | B    | C    | D    | E    | F    |
|-------|------|------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|------|
| A     | 1,00 | 0,33 | 4,00 | 0,33 | 0,33 | 3,00 | A     | 1,00 | 0,20 | 2,00 | 0,33 | 1,00 | 0,17 |
| B     | 3,00 | 1,00 | 2,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | B     | 5,00 | 1,00 | 3,00 | 1,00 | 2,00 | 0,50 |
| C     | 0,25 | 0,50 | 1,00 | 0,20 | 0,33 | 0,17 | C     | 0,50 | 0,33 | 1,00 | 1,00 | 3,00 | 0,33 |
| D     | 3,00 | 1,00 | 5,00 | 1,00 | 4,00 | 0,50 | D     | 3,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 3,00 | 1,00 |
| E     | 3,00 | 0,33 | 3,00 | 0,25 | 1,00 | 0,25 | E     | 1,00 | 0,50 | 0,33 | 0,33 | 1,00 | 0,33 |

|                      |          |          |          |          |          |          |                      |          |          |          |          |          |          |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>F</b>             | 0,33     | 0,50     | 6,00     | 2,00     | 4,00     | 1,00     | <b>F</b>             | 6,00     | 2,00     | 3,00     | 1,00     | 3,00     | 1,00     |
| <b>Q<sub>3</sub></b> | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> | <b>E</b> | <b>F</b> | <b>Q<sub>4</sub></b> | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> | <b>E</b> | <b>F</b> |
| <b>A</b>             | 1,00     | 3,00     | 1,00     | 0,50     | 4,00     | 0,33     | <b>A</b>             | 1,00     | 0,50     | 4,00     | 0,50     | 0,50     | 4,00     |
| <b>B</b>             | 0,33     | 1,00     | 0,50     | 1,00     | 2,00     | 0,33     | <b>B</b>             | 2,00     | 1,00     | 5,00     | 2,00     | 1,00     | 3,00     |
| <b>C</b>             | 1,00     | 2,00     | 1,00     | 1,00     | 0,50     | 0,33     | <b>C</b>             | 0,25     | 0,20     | 1,00     | 0,25     | 0,33     | 0,33     |
| <b>D</b>             | 2,00     | 1,00     | 1,00     | 1,00     | 3,00     | 1,00     | <b>D</b>             | 2,00     | 0,50     | 4,00     | 1,00     | 1,00     | 4,00     |
| <b>E</b>             | 0,25     | 0,50     | 2,00     | 0,33     | 1,00     | 0,50     | <b>E</b>             | 2,00     | 1,00     | 3,00     | 1,00     | 1,00     | 3,00     |
| <b>F</b>             | 3,00     | 3,00     | 3,00     | 1,00     | 2,00     | 1,00     | <b>F</b>             | 0,25     | 0,33     | 3,00     | 0,25     | 0,33     | 1,00     |
| <b>Q<sub>5</sub></b> | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> | <b>E</b> | <b>F</b> | <b>Q<sub>6</sub></b> | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> | <b>E</b> | <b>F</b> |
| <b>A</b>             | 1,00     | 0,33     | 1,00     | 0,50     | 2,00     | 0,25     | <b>A</b>             | 1,00     | 0,50     | 3,00     | 0,50     | 0,33     | 3,00     |
| <b>B</b>             | 3,00     | 1,00     | 4,00     | 2,00     | 2,00     | 0,33     | <b>B</b>             | 2,00     | 1,00     | 4,00     | 1,00     | 2,00     | 0,50     |
| <b>C</b>             | 1,00     | 0,25     | 1,00     | 0,33     | 2,00     | 0,20     | <b>C</b>             | 0,33     | 0,25     | 1,00     | 0,33     | 0,25     | 0,33     |
| <b>D</b>             | 2,00     | 0,50     | 3,00     | 1,00     | 4,00     | 0,33     | <b>D</b>             | 2,00     | 1,00     | 3,00     | 1,00     | 0,50     | 2,00     |
| <b>E</b>             | 0,50     | 0,50     | 0,50     | 0,25     | 1,00     | 0,25     | <b>E</b>             | 3,00     | 0,50     | 4,00     | 2,00     | 1,00     | 3,00     |
| <b>F</b>             | 4,00     | 3,00     | 5,00     | 3,00     | 4,00     | 1,00     | <b>F</b>             | 0,33     | 2,00     | 3,00     | 0,50     | 0,33     | 1,00     |

Розраховуємо локальні вектори пріоритетів, індекс узгодженості та відношення узгодженості для матриці попарних порівнянь критеріїв (таблиця 1) та матриць попарних порівнянь альтернатив А, В, С, D, E, F за критеріями (таблиця 2).

Локальні пріоритети отримуються шляхом обчислення середнього геометричного рядків матриці попарних порівнянь матриці *A*, з наступною нормалізацією всіх складових вектора:

$$x_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}} / \sum_{i=1}^n \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}, \quad (1)$$

де  $a_{ij}$  - елемент матриці попарних порівнянь.

Для оцінки однорідності тверджень використовують відхилення величини максимального власного значення від порядку матриці. Якщо порядок матриці  $n$  збігається з максимальним власним числом  $\lambda_{\max}$ , то судження узгоджені. Для встановлення непослідовності тверджень використовують індекс узгодженості та відношення узгодженості. Індекс узгодженості визначається наступним чином:

$$I_y = (\lambda_{\max} - n)/(n - 1), \text{ де } \lambda_{\max} = \sum_{j=1}^n \left( x_j \times \sum_{i=1}^n a_{ij} \right). \quad (2)$$

Відношення узгодженості  $I_o$  визначають наступним чином:

$$I_o = I_y / M(I_y), \quad (3)$$

де  $M(I_y)$  - середнє значення індексу узгодженості для випадкових матриць розміреності  $n$ . Якщо отримане значення менше 10%, то рівень узгодженості вважається задовільним.

Скориставшись формулами (1) розраховуємо вектор пріоритетів критеріїв, отриманий в результаті розрахунку головного власного вектора з наступною його нормалізацією.

Таблиця 3 – Розрахунок вектора локальних пріоритетів матриці критеріїв

|                | Q <sub>1</sub> | Q <sub>2</sub> | Q <sub>3</sub> | Q <sub>4</sub> | Q <sub>5</sub> | Q <sub>6</sub> | Вектор пріоритетів |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------------------|
| Q <sub>1</sub> | 1,00           | 0,25           | 0,25           | 0,25           | 0,20           | 2,00           | 0,06               |
| Q <sub>2</sub> | 4,00           | 1,00           | 0,20           | 3,00           | 3,00           | 0,50           | 0,16               |
| Q <sub>3</sub> | 4,00           | 5,00           | 1,00           | 3,00           | 3,00           | 4,00           | 0,39               |
| Q <sub>4</sub> | 4,00           | 0,33           | 0,33           | 1,00           | 0,33           | 0,33           | 0,08               |
| Q <sub>5</sub> | 5,00           | 0,33           | 0,33           | 3,00           | 1,00           | 0,25           | 0,11               |
| Q <sub>6</sub> | 2,00           | 2,00           | 0,25           | 3,00           | 4,00           | 1,00           | 0,20               |

Скориставшись формулами (2-3) розраховуємо індекс узгодженості та відношення однорідності:

$$I_y = 0,29, I_o = 0,234$$

Отримане значення відношення узгодженості дещо зависоке, але будемо вважати його прийнятним.

В розглянутому випадку задоволеність є найважливішим при виборі заняття, друге місце посідає користь, третє – зацікавленість, четверте – ресурсозатратність, п'яте – доцільність, а шосте – витрачений час. Аналогічно розраховуємо локальні пріоритети для даних шести альтернатив за кожним з критеріїв (таблиця 4).

Таблиця 4 – Розраховані значення локальних пріоритетів для альтернатив за кожним критерієм

|                |      |      |      |      |      |         |       |                |      |      |      |      |      |         |       |
|----------------|------|------|------|------|------|---------|-------|----------------|------|------|------|------|------|---------|-------|
| Q <sub>1</sub> | A    | B    | C    | D    | E    | F       |       | Q <sub>2</sub> | A    | B    | C    | D    | E    | F       |       |
| A              | 1,00 | 0,33 | 4,00 | 0,33 | 0,33 | 3,00    | 0,13  | A              | 1,00 | 0,20 | 2,00 | 0,33 | 1,00 | 0,17    | 0,08  |
| B              | 3,00 | 1,00 | 2,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00    | 0,26  | B              | 5,00 | 1,00 | 3,00 | 1,00 | 2,00 | 0,50    | 0,22  |
| C              | 0,25 | 0,50 | 1,00 | 0,20 | 0,33 | 0,17    | 0,05  | C              | 0,50 | 0,33 | 1,00 | 1,00 | 3,00 | 0,33    | 0,11  |
| D              | 3,00 | 1,00 | 5,00 | 1,00 | 4,00 | 0,50    | 0,25  | D              | 3,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 3,00 | 1,00    | 0,21  |
| E              | 3,00 | 0,33 | 3,00 | 0,25 | 1,00 | 0,25    | 0,11  | E              | 1,00 | 0,50 | 0,33 | 0,33 | 1,00 | 0,33    | 0,07  |
| F              | 0,33 | 0,50 | 6,00 | 2,00 | 4,00 | 1,00    | 0,20  | F              | 6,00 | 2,00 | 3,00 | 1,00 | 3,00 | 1,00    | 0,31  |
|                |      |      |      |      |      | $I_y =$ | 0,258 |                |      |      |      |      |      | $I_y =$ | 0,089 |
|                |      |      |      |      |      | $I_o =$ | 0,208 |                |      |      |      |      |      | $I_o =$ | 0,072 |
| Q <sub>3</sub> | A    | B    | C    | D    | E    | F       |       | Q <sub>4</sub> | A    | B    | C    | D    | E    | F       |       |
| A              | 1,00 | 3,00 | 1,00 | 0,50 | 4,00 | 0,33    | 0,17  | A              | 1,00 | 0,50 | 4,00 | 0,50 | 0,50 | 4,00    | 0,16  |
| B              | 0,33 | 1,00 | 0,50 | 1,00 | 2,00 | 0,33    | 0,11  | B              | 2,00 | 1,00 | 5,00 | 2,00 | 1,00 | 3,00    | 0,28  |
| C              | 1,00 | 2,00 | 1,00 | 1,00 | 0,50 | 0,33    | 0,13  | C              | 0,25 | 0,20 | 1,00 | 0,25 | 0,33 | 0,33    | 0,05  |
| D              | 2,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 3,00 | 1,00    | 0,21  | D              | 2,00 | 0,50 | 4,00 | 1,00 | 1,00 | 4,00    | 0,22  |
| E              | 0,25 | 0,50 | 2,00 | 0,33 | 1,00 | 0,50    | 0,09  | E              | 2,00 | 1,00 | 3,00 | 1,00 | 1,00 | 3,00    | 0,23  |
| F              | 3,00 | 3,00 | 3,00 | 1,00 | 2,00 | 1,00    | 0,30  | F              | 0,25 | 0,33 | 3,00 | 0,25 | 0,33 | 1,00    | 0,07  |
|                |      |      |      |      |      | $I_y =$ | 0,134 |                |      |      |      |      |      | $I_y =$ | 0,051 |
|                |      |      |      |      |      | $I_o =$ | 0,108 |                |      |      |      |      |      | $I_o =$ | 0,041 |
| Q <sub>5</sub> | A    | B    | C    | D    | E    | F       |       | Q <sub>6</sub> | A    | B    | C    | D    | E    | F       |       |
| A              | 1,00 | 0,33 | 1,00 | 0,50 | 2,00 | 0,25    | 0,09  | A              | 1,00 | 0,50 | 3,00 | 0,50 | 0,33 | 3,00    | 0,14  |
| B              | 3,00 | 1,00 | 4,00 | 2,00 | 2,00 | 0,33    | 0,21  | B              | 2,00 | 1,00 | 4,00 | 1,00 | 2,00 | 0,50    | 0,21  |
| C              | 1,00 | 0,25 | 1,00 | 0,33 | 2,00 | 0,20    | 0,08  | C              | 0,33 | 0,25 | 1,00 | 0,33 | 0,25 | 0,33    | 0,05  |
| D              | 2,00 | 0,50 | 3,00 | 1,00 | 4,00 | 0,33    | 0,17  | D              | 2,00 | 1,00 | 3,00 | 1,00 | 0,50 | 2,00    | 0,20  |
| E              | 0,50 | 0,50 | 0,50 | 0,25 | 1,00 | 0,25    | 0,06  | E              | 3,00 | 0,50 | 4,00 | 2,00 | 1,00 | 3,00    | 0,27  |
| F              | 4,00 | 3,00 | 5,00 | 3,00 | 4,00 | 1,00    | 0,40  | F              | 0,33 | 2,00 | 3,00 | 0,50 | 0,33 | 1,00    | 0,12  |
|                |      |      |      |      |      | $I_y =$ | 0,061 |                |      |      |      |      |      | $I_y =$ | 0,156 |
|                |      |      |      |      |      | $I_o =$ | 0,049 |                |      |      |      |      |      | $I_o =$ | 0,126 |

Далі розраховуємо глобальні пріоритети. Ця процедура зводиться до формування матриці  $P_1^{(1)}$  локальних пріоритетів альтернатив за критеріями з подальшим її множенням на вектор  $x_1^{(1)}$  пріоритетів критеріїв.

$$x_1^{(1)} = [0,06; 0,16; 0,39; 0,08; 0,11; 0,20]^T, \text{ де } T - \text{транспонована матриця,}$$

$$P_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,13 & 0,08 & 0,17 & 0,16 & 0,09 & 0,14 \\ 0,26 & 0,22 & 0,11 & 0,28 & 0,21 & 0,21 \\ 0,05 & 0,11 & 0,13 & 0,05 & 0,08 & 0,05 \\ 0,25 & 0,21 & 0,21 & 0,22 & 0,17 & 0,20 \\ 0,11 & 0,07 & 0,09 & 0,23 & 0,06 & 0,27 \\ 0,20 & 0,31 & 0,30 & 0,07 & 0,40 & 0,12 \end{bmatrix}.$$

$$P_1^{(1)} = P_1^{(1)} \times x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,137 \\ 0,18 \\ 0,093 \\ 0,205 \\ 0,131 \\ 0,254 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, за загальним показником (не дивлячись на найгірші показники за найважливішим критерієм – задоволеність) обираємо заняття **F** в період карантину, тому що інші показники у ньому на досить хорошому рівні порівняно з альтернативами.

Ми навели приклад простішої ієрархічної структури, де для знаходження глобального вектора пріоритетів можна було скористатися калькулятором чи здійснити реалізацію методу Сааті в середовищі Excel за допомогою матричних функцій. Проте, за умови наявності великої кількості вихідних даних опрацювання ускладнюються. Тому нами було розроблено програму на мові програмування Python з простим для користувача інтерфейсом (рис. 2).

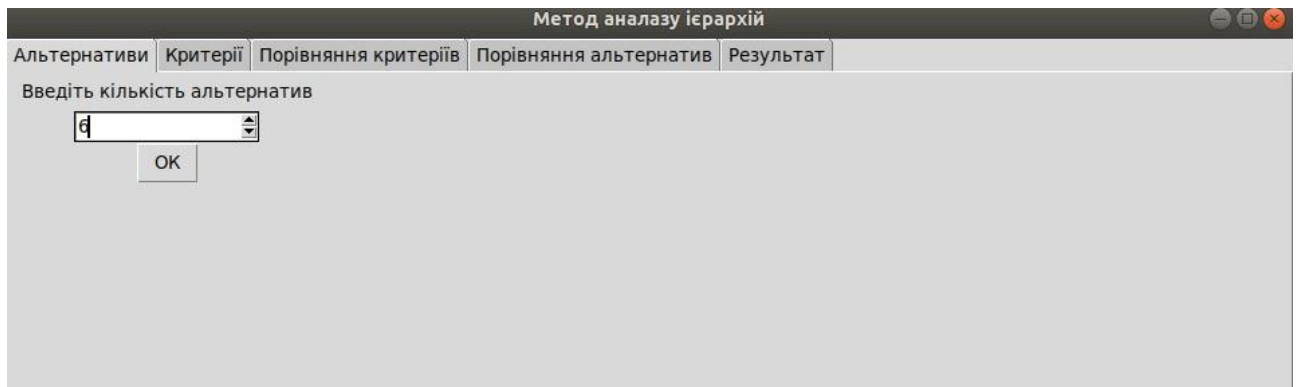


Рис. 2. Програмна реалізація методу аналізу ієрархій на етапі введення альтернатив

### Висновок

Використовуючи метод аналізу ієрархій, нами було розроблено програмний продукт підтримки прийняття рішення, який дає змогу системному аналітику визначити оптимальний варіант вибору альтернативи та скоротити час на проведення аналізу.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Катренко А. В. Системний аналіз: підручник. Львів: «Новий Світ – 2000», 2009. 396 с.
2. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 278 с.
3. Ершова Н. М. Принятие решений на основе метода анализа иерархий. Вісник Придніпровської держ. акад. будва і архітектури. Дніпропетровськ, 2015. № 9 (210). С. 39–45.

**Щипський Юрій Олександрович** – студент групи ІКН-176, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінниця, e-mail: [shchipskii@gmail.com](mailto:shchipskii@gmail.com)

**Діденко Юрій Володимирович** – студент групи ІКН-176, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінниця, e-mail: [Yura14092000@icloud.com](mailto:Yura14092000@icloud.com)

**Прозор Олена Петрівна** — к.пед.н., доцент кафедри комп'ютерних наук, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: [prozor@vntu.edu.ua](mailto:prozor@vntu.edu.ua)

**Яровий Андрій Анатолійович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: [a.yarovyy@vntu.edu.ua](mailto:a.yarovyy@vntu.edu.ua)

**Yurii O. Shchipskii** – Student of Information Technologies and Computer Engineering Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnitsia, e-mail: [shchipskii@gmail.com](mailto:shchipskii@gmail.com)

**Yurii V. Didenko** – Student of Information Technologies and Computer Engineering Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnitsia, e-mail: [Yura14092000@icloud.com](mailto:Yura14092000@icloud.com)

**Olena P. Prozor** – Candidate of Science (Pedagogic), Prof. Assistant of Computer Science Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [prozor@vntu.edu.ua](mailto:prozor@vntu.edu.ua)

**Andrii A. Yarovyi** – Doctor of Science (Eng.), Professor, Head of Computer Science Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [a.yarovyy@vntu.edu.ua](mailto:a.yarovyy@vntu.edu.ua)