УДК 517.926

М. М. Ковтонюк

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ЗЧИСЛЕННОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ДРОБОВОГО РАНГУ ПРИ ПОХІДНІЙ

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Анотація

У роботі побудовано формальний розв’язок зчисленної системи диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром дробового рангу при похідній й доведено асимптотичний характер такого розв’язку (у розумінні М.Крилова-М.Боголюбова-Ю.Митропольського) за допомогою методу «укорочення» О.Жаутикова.

Ключові слова: зчисленні системи диференціальних рівнянь, малий параметр, дробовий ранг, формальний і точний розв’язки, асимптотичні методи, метод «укорочення».

Abstract

In this paper a formal solution of a countable system of second order ordinary differential equations with a small parameter multiplying the second order derivative is constructed. We prove the asymptotic nature of such a solution (according to Kyrilov-Bogolyubov-Mitropolsky definition) using Zhautykov "shortening" method.

Keywords: countable system of second order ordinary differential equations, small parameter, formal and exact solutions, asymptotic methods, method of "shortening".

Вступ

Серед наближених методів інтегрування диференціальних рівнянь важливе місце займають асимптотичні методи, в основі яких лежить ідея розкладу шуканого розв’язку у формальний ряд за степенями малого параметра. І, хоча при цьому степеневі ряди є, зазвичай, розбіжними, тим не менш наближений розв’язок, отриманий шляхом обриву формальних рядів на якомусь m-му члені, є цілком корисним для цілого ряду практичних розрахунків. Цей розв’язок має асимптотичний характер у тому розумінні, що він прямує до відповідного точного розв’язку не із збільшенням числа членів ряду, а при фіксованій кількості членів ряду і при прямуванні до нуля так званого малого параметра. До фундаментальних досліджень у теорії нелінійних диференціальних рівнянь з малим параметром відносять праці М.Крилова, М.Боголюбова, Ю.Митропольського, Ю.Далецького і С.Крейна. В них створено асимптотичні методи, які тепер є одними із головних методів дослідження процесів, що відбуваються коливальних системах. Великий науковий доробок у розвиток асимптотичних методів інтегрування диференціальних рівнянь та їх систем належить академіку М. Шкілю (понад 250 праць, серед яких 8 монографій) [6]. М. Шкіль створив наукову школу з теорії диференціальних рівнянь, яка розробляє методи побудови асимптотичних розв’язків диференціальних, інтегро-диференціальних рівнянь та їх систем у скінченних і банахових просторах. Зокрема, проблема асимптотичного інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром дробового рангу у скінченних і нескінченних (банахових) просторах розглядалася у працях В.Григоренка [2], Г. Завізіона, С. Кондакової [4], І. Конета [5], В. Лейфури, Т. Мейлієва [6], Ю. Підченка, М. Сотніченка, І. Старуна, М.Стрельнікова, В. Яковця [7] та інших.

Знаходження асимптотичного розв’язку зчисленних систем диференціальних рівнянь (СДР) істотно відрізняється від побудови асимптотичного розв’язку систем диференціальних рівнянь в n-мірному просторі того ж виду. Це пов’язано із вибором банахового простору, рівномірною збіжністю рядів, множенням нескінченних матриць (дистрибутивний закон множення відносно додавання), особливістю використання визначників. Диференціальні рівняння в нескінченних просторах вивчали К.Валєєв і О.Жаутиков [1], Ю. Далецький і С. Крейн, К.Персидський, М. Ковтонюк [2].

Результати дослідження

Розглянемо в нескінченому просторі m рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей однорідну систему диференціальних рівнянь 2-го порядку

$$\varepsilon^{\frac{p}{q}} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + A(\tau,\varepsilon)x = 0, \qquad (1)$$

де $x(\tau,\varepsilon)$ – шуканий нескінченомірний вектор, $A(\tau,\varepsilon)$ – дійсна нескінчена матриця, елементами якої є дійсні функції дійсної змінної, $\tau \in [0,L]$, ε – малий дійсний параметр, p і q – взаємно прості натуральні числа, причому $q \neq 1$.

Відносно коефіцієнтів рівняння (1) припустимо, що матрицю $A(\tau,\varepsilon)$ можна подати у вигляді ряду за степенями малого параметра $A(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau)$, головна матриця $A_0(\tau)$ є дігональною $A_0(\tau) = diag\{\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), ...\}$, елементи точкового дискретного спектру не співпадають $\lambda_j(\tau) \neq \lambda_k(\tau), \quad j \neq k, \quad j,k = 1,2,...$; матриці $A_s(\tau) = \left\| a_{s,j,k}(\tau) \right\|_{j,k=1}^{\infty}$, $s = 0,1,2,...$, нескінченне число разів диференційовні на відрізку; ряди $\frac{d^s a_j(\tau,\varepsilon)}{d\tau^s} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{d^s \left| a_{jl}(\tau,\varepsilon) \right|}{d\tau^s}$, $s = 0,1,...,$ рівномірно збігаються на відрізку, функції $\left| \frac{d^s a_j(\tau,\varepsilon)}{d\tau^s} \right| \leq \gamma_s$ є обмеженими $\forall\, j = 0,1,2,....;$ $\left| \lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau) \right| \geq d > 0, \ \forall\, j = 2,3,...$

За допомогою підстановки $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{2q}}$ або $\varepsilon = \mu^{2q}$ систему диференціальних рівнянь (1) зводимо до вигляду

$$\mu^{2p} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + A\left(\tau, \mu^{2q}\right)x = 0, \qquad (2)$$

де $A\left(\tau,\mu^{2q}\right) = A_0(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^{2qs} A_s(\tau)$. Якщо ввести заміну $y_{2k-1} = x_k$, $y_{2k} = \frac{dx_k}{d\tau}$, $k = 1,2,...,$ то зчисленну систему диференціальних рівнянь (2) другого порядку можна звести до зчисленної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mu^{2p} \frac{dy}{d\tau} = B\left(\tau, \mu^{2q}\right)y, \qquad (3)$$

де $y = colon\{y_1, y_2, ...\}$, $B\left(\tau,\mu^{2q}\right)$ – зчисленна матриця.

Тоді така система рівнянь задовольняє умовам теореми існування і єдиності нескінченних систем диференціальних рівнянь. Отже, через задану точку $\left(\tau_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ...\right)$ області H проходить єдиний розв'язок $\nu(\tau,\mu) = \{\nu_1(\tau,\mu), \nu_2(\tau,\mu), ...\}$ даної системи, причому цей розв'язок є обмежений, одностайно неперервний відносно τ і μ і відносно своїх початкових значень, тобто має місце теорема 1.

ТЕОРЕМА 1. Якщо виконуються умови стосовно коефіцієнтів системи (1), то у випадку $p < 2q$ і $p > 2q$ існує формальний частинний розв'язок системи (2), який можна подати у вигляді

$$x(\tau,\mu) = u(\tau,\mu)\exp\left(i\mu^{-p} \int_0^{\tau} \sqrt{\lambda_1(\tau)}\,d\tau\right), \text{ де } \ u(\tau,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(\tau).$$

Зауважимо, що можна довести асимптотичний характер побудованого формального розв'язку зчисленної СДР, використавши методику "укорочення" систем, яка розглядалась у працях К. Персидського, О. Жаутикова [1]. Суть методу полягає в тому, що розв'язування зчисленної СДР зводиться до розв'язування так званої "укороченої" СДР, причому розв'язок зчисленної системи отримується з розв'язку "укороченої" системи граничним переходом при $n \to \infty$.

Далі, для нашої зчисленної СДР розглянемо так звану "укорочену" систему

$$\begin{cases} \mu^{2p} \dfrac{dy_1}{d\tau} = b_{11}\left(\tau, \mu^{2q}\right) y_1 + b_{12}\left(\tau, \mu^{2q}\right) y_2 + \ldots + b_{1,2n}\left(\tau, \mu^{2q}\right) y_{2n}, \\ \mu^{2p} \dfrac{dy_2}{d\tau} = b_{21}\left(\tau, \mu^{2q}\right) y_1 + b_{22}\left(\tau, \mu^{2q}\right) y_2 + \ldots + b_{2,2n}\left(\tau, \mu^{2q}\right) y_{2n}, \\ \ldots \\ \mu^{2p} \dfrac{dy_{2n}}{d\tau} = b_{2n,1}\left(\tau, \mu^{2q}\right) y_1 + b_{2n,2}\left(\tau, \mu^{2q}\right) y_2 + \ldots + b_{2n,2n}\left(\tau, \mu^{2q}\right) y_{2n}, \end{cases} \tag{4}$$

яка отримується з (3) прирівнюванням до нуля всіх шуканих функцій, починаючи з $(2n+1)-$ої, і відкиданням всіх рівнянь, починаючи з $(2n+1)-$го. Тут має місце теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. Якщо $v(\tau, \mu)$ розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь (2); $y(\tau, \mu)-$розв'язок «укороченої» системи диференціальних рівнянь (4), $y_m(\tau, \mu)-m$-наближений розв'язок системи (4), тоді $\forall \varepsilon_0 > 0$ існує стала $C > 0$ така, що $\forall\ \tau \in [0; L],\ \forall\ \mu \in (0; \mu_0]$ правильна нерівність $\left| v_s(\tau, \mu) - y_{s,2n}^{(m)}(\tau, \mu) \right| < \varepsilon_0 + C\mu^{m+2p}, \quad n \to \infty,\ s = 1,2,\ldots$.

Висновки

Побудовано формальний розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь з малим параметром дробового рангу при похідній вигляду (1) у випадку простого дискретного спектру матриці $A_0(\tau)$, досліджено його асимптотичний характер. Доведено теореми 1 і 2.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Валеев К.Г., Жаутыков О.А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1974. – 413 с.
2. Григоренко В.К. К вопросу интегрирования систем линейных дифференциальных уранений, содержащих дробный параметр// УМЖ, 1978, т. 30. – с. 217-222.
3. Ковтонюк М.М. Асимптотичний характер формального розв'язку зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь 2 порядку з малим параметром при похідній /М.М.Ковтонюк// Матеріали міжнародної науково-практичної Інтернет-конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності (2018)» [Електронне мережне наукове видання]: збірник матеріалів. – Вінниця: ВНТУ, 2018. – С.261-264.
4. Кондакова С.В. Про асимптотичні розв'язки системи лінійних диференціальних рівнянь, яка при похідних містить параметр з дробовим показником. – Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова, 2001, №2. – с. 262-272.
5. Конет И. М. Формальные интегральные матрицы систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной / И. М. Конет // Доклады АН УССР, сер. А, Физико-математические и технические науки, 1982, №5. – С. 20-23.
6. Мейлиев Т.К. Об асимптотическом представлении решений систем линейных дифференцивальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной / Т.К.Мейлиев, Н.И.Шкиль. – В кн. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. К.: Наукова думка, 1979. – С.124-130.
7. Яковець В.П., Стрельніков М.А. Побудова асимптотичних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь з двома малими параметрами. // УМЖ, 2003, т. 55, №7. – с. 961-976.

Ковтонюк Мар'яна Михайлівна – доктор педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського; м.Вінниця, e-mail: kovtonyukmm@gmail.com.

Kovtonyuk Mariana Mikhailovna - Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Mathematics and Informatics of the Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University; Vinnytsia, e-mail: kovtonyukmm@gmail.com.