УДК 517.97

С. М. Бак, Г. М. Ковтонюк, Б. В. Лисак

БІЖУЧІ ХВИЛІ В СИСТЕМІ ФЕРМІ-ПАСТИ-УЛАМА ІЗ НАСИЧУВАНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Анотація

Одержано результат про існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама із насичуваною нелінійністю. Для цього використано варіаційну техніку і метод періодичних апроксимацій.

Ключові слова: система Фермі-Пасти-Улама, біжучі хвилі, критичні точки, насичувана нелінійність.

Abstract

It is obtained result on the existence of periodic and solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system. For this, a variational technique and a method of periodic approximations are used.

Keywords: Fermi-Pasta-Ulam system, traveling waves, critical points, saturable nonlinearity.

У 1953 році один із найвидатніших фізиків XX століття Е. Фермі попросив своїх колег по Лос-Аламоській лабораторії С. Улама, Дж. Пасту та М. Цингу одну з нелінійних задач на ЕОМ «MANIAC I» (англ.: Mathematical Analyzer, Numerical Integrator and Computer). Вони повинні були дослідити питання про термалізацію енергії в нелінійних дискретно навантажених струнах на прикладі коливання 64 важків, пов'язаних одна з одною пружинками, які при відхиленні від положення рівноваги отримували силу повернення. Створюючи початкове коливання, дослідники хотіли подивитися, як ця початкова мода буде розподілятися по всіх інших модах. Передбачалося, що енергія в кінці кінців рівномірно розподілиться між модами, тобто по всій довжині хвилі, тим самим відбудеться термалізація енергії. Фактично задача зводилася до дослідження поведінки систем звичайних диференціальних рівнянь, які спочатку були лінійними, але в які було внесено нелінійність як збурення. Якби такого збурення не було, то енергія кожної нормальної моди лінійної системи, тобто коливань із заданою частотою, була б сталою. Тому можна було сподіватися, що нелінійні взаємодії між модами приведуть до того, щоб енергія системи рівномірно розподілилася між модами. після проведення розрахунків цієї задачі на «MANIAC I» очікуваного результату вони не отримали, але виявили, що перекачування енергії в дві або три моди на початковому етапі розрахунку дійсно відбувається, але потім спостерігається повернення до початкового стану. Варто зауважити, що відносно недавно (у 2015 р.) групою науковців у складі: М. Онорато, Л. Позелла, Д. Промент під керівництвом американського вченого Ю. Львова вдалося знайти розв'язання проблеми Фермі–Пасти–Улама. В статті [12] наводиться математичне пояснення, який рівень енергії необхідний, щоб створити одну повну хвилю в ланцюжку з'єднаних важок, які прагнуть до теплової рівноваги.

Праці Е. Фермі, Дж. Пасти та С. Улама дали поштовх для великої кількості подальших чисельних та аналітичних досліджень. Один з перших строгих результатів щодо загальних систем типу Фермі–Пасти–Улама був отриманий у 1994 році Ж. Фрізеке та Дж. Ваттісом в статті [11]. Вони довели існування відокремлених біжучих хвиль з деякими загальними припущеннями щодо потенціалу взаємодії між частинками. Для одержання основних результатів вони використали процедуру умовної мінімізації та принцип концентрованої компактності. Найбільш повний огляд результатів для таких систем можна знайти в [13].

Будемо розглядати одновимірний ланцюг частинок, що взаємодіють зі своїми найближчими сусідами. Рівняння руху такої системи мають вигляд:

$$\ddot{q}_n(t) = U'\big(q_{n+1}(t) - q_n(t)\big) - U'\big(q_n(t) - q_{n-1}(t)\big), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $q_n(t)$ – координата n-ої частинки в момент часу t, U – потенціал взаємодії між сусідніми частинками.

Біжучі хвилі в подібних системах на двовимірних ґратках вивчалися в статтях [1-5; 7; 8; 10].

У цій статті ми будемо вивчати системи (1) із насичуваними нелінінійностями, які не задовольняють умови, одержані в [13]. Це означає, що на нескінченності $U'(r)$ росте як $const \cdot r$. Зауважимо, що такі нелінійності вивчалися в статтях [6; 9; 14].

Зауважимо, що біжучою хвилею є розв'язок вигляду

$$q_n(t) = u(n - ct),$$

де $u(s)$ – функція неперервного аргументу $s \in \mathbb{R}$. Функція $u(s)$ називається профілем хвилі. Константа $c \neq 0$ представляє собою швидкість хвилі. Підставляючи біжучу хвилю в систему (1), одержуємо рівняння для профілю біжучої хвилі

$$c^2 u''(s) = U'\big(u(s+1) - u(s)\big) - U'\big(u(s) - u(s-1)\big). \tag{2}$$

Зауважимо, що в статті [14] вивчалися два види біжучих хвиль: періодичні і відокремлені. Періодична біжуча хвиля – це біжуча хвиля профіль відносного зміщення $r(s) = \int_s^{s+1} u'(\tau)d\tau$ (рівнозначно, $u'(s)$) – періодична функція. А відокремелена біжуча хвиля – хвиля, профіль відносного зміщення $r(s)$ (рівнозначно, $u'(s)$) розпливається на нескінченності.

На відміну від статті [14] ми будемо накладати умови не на профіль відносного зміщення, а на сам профіль. Тобто у випадку періодичних біжучих хвиль достатньо знайти розв'язок, який задовольняє умову (періодичність)

$$u(s+2k) = u(s), \quad k > 0\,. \tag{3}$$

А у випадку відокремлених біжучих хвиль (розпливання)

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0\,. \tag{4}$$

Для формулювання припущень про потенціал $U(r)$ відокремимо гармонічну і ангармонічну частини

$$U(r) = \frac{c_0^2}{2} r^2 + V(r)\,.$$

Зробимо наступні припущення:

(i) *функція V є неперервно диференційовною на $\mathbb{R}$ та $V(0) = V'(0) = 0$, а $V'(r) = o(r)$ при $r \to 0$;*

(ii) *існує скінченна границя $\lim\limits_{r\to\pm\infty} \dfrac{V'(r)}{r} = l$, а функція $g(r) = V'(r) - lr$ обмежена;*

(iii) *для кожного $r_0 > 0$ існує $\delta_0 > 0$ таке, що $\frac{1}{2} rV'(r) - V(r) \geq \delta_0$ для $|r| \geq r_0$*, і $V(r) \geq 0$ для всіх $r \in \mathbb{R}$.

За допомогою теореми про гірський перевал ([13; 15]) і методу періодичних апроксимацій одержано наступні результати.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (i)-(iii). Тоді якщо $c_0^2 < c^2 < c_0^2 + l$ і*

$$G(r) := \int_0^r g(t)dt \to -\infty \text{ при } r \to \pm\infty\,,$$

або

$$c^2 \left(\frac{\pi n}{k}\right)^2 - 4\left(c_0^2 + l\right)\sin^2 \frac{\pi n}{2k} \neq 0 \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\,,$$

то рівняння (2) має несталий розв'язок u, який задовольняє умову (3).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (i)-(iii). Тоді якщо $c_0^2 < c^2 < c_0^2 + l$, то рівняння (3) має несталий розв'язок u, який задовольняє умови (4). Більше того, цей розв'язок має експоненціальну оцінку, тобто*

$$|u'(s)| \leq C \exp\left(-\alpha |s|\right)$$

з деякими додатними константами C і α.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бак С. Н., Панков А. А. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник*. 2010. Т. 7, №2. С. 154–175.
2. Бак С.М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці. *Український математичний журнал*. 2017. Т. 69, №4. С. 435-444.
3. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57, №3. С. 45–52.
4. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній гратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. Вип. 10. С. 17-23.
5. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній гратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. Вип. 12. С. 5-12.

6. Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. 2018. Вип. 18. С. 5-13.
7. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 217, №2 (August). P. 187–197.
8. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice. *Ukrainian mathematical Journal*. 2017. Vol. 4 (69). P.509-520.
9. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
10. Feckan M., Rothos V. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions. *Nonlinearity*. 2007. Vol. 20. P. 319–341.
11. Friesecke G., Wattis J. A. D. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Commun. Math. Phys*. 1994. Vol. 161. P. 391–418.
12. Onorato M., Vozella L., Proment D., Lvov Y. V. Route to Thermalization in the α–Fermi–Pasta–Ulam System. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A*. 2015. Vol. 112. P. 1–6.
13. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta–Ulam Lattices. London–Singapore : Imperial College Press, 2005. 96 p.
14. Pankov A. Traveling Waves in Fermi–Pasta–Ulam Lattices with saturable nonlinerities. *Discrete and continuous dynamical systems.* 2011. Vol. 30, № 3 (July). P. 835-849.
15. Rabinowitz P. Minimax methods in criticsl point theory with applications to differential equations. Providence: Amer. Math. Soc., 1986. 100 p.

Бак Сергій Миколайович — канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Bak Sergiy M. — Cand. Sc. (Eng), Associate Professor of Department of Mathematics and Computer Science, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University

Ковтонюк Галина Миколаївна — канд. пед. наук, старший викладач кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Kovtonyuk Galyna M. — Cand. Sc. (Eng), Senior Lecturer of Department of Mathematics and Computer Science, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University

Лисак Богдан Володимирович — студент факультету математики, фізики, комп'ютерних наук і технологій, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Lisak Bogdan Volodymyrovych — student of the Faculty of Mathematics, Physics, Computer Science and Technology, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University