УДК 514.378.14

О.М.Кравчук,
А.І.Марчук

МЕТОД «ЗАМКНУТОГО КОНТУРА» У АНАЛІТИЧНІЙ ГЕОМЕТРІЇ

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

Анотація
У статті розкрито суть методу «замкнутого контура» та проаналізовано можливості його практичного застосування, зокрема у механіці, що актуалізує важливість розгляду методу замкнутих векторних контурів до розв'язання задач аналітичної геометрі.
***Ключові слова**: векторні методи, метод замкнутого контура, аналітична геометрія.*

Abstract
The article describes the essence of the closed-loop method and analyzes the possibilities of its practical application, in particular in the mechanics, which points to the importance of considering the method of closed vector contours before solving problems of analytical geometry.
***Keywords**: vector methods, closed loop method, analytical geometry.*

Вступ

Поняття вектора є одним із фундаментальних математичних понять, яке може трактуватися по-різному: як напрямлений відрізок; як множина рівних за довжиною співнапрямлених відрізків; як паралельне перенесення та ін. Як напрямлений відрізок вектор на початку застосовували в механіці для зображення фізичних векторних величин: швидкості, прискорення, сили, моменту сили тощо. З часом поняття вектора модернізувалося.

Геометричні операції над векторами як напрямленими відрізками та їх властивості, вирізняючись простотою і хорошою наочністю, з перших початків сприяли утвердженню поняття вектора і його загальному визнанню, застосуванню в інших розділах фізики: в кінематиці, статиці і динаміці, в теорії потенціалу та гідродинаміці. Поняття вектора стало одним із основних понять таких галузей математики як векторна алгебра, векторний аналіз, теорія поля, тензорний аналіз тощо. Поняття вектора, як абстрактне, є одним із основних математичних понять і всі операції над ними виконуються за законами математики.

Сучасні програми з математики для основної школи передбачають вивчення векторів у геометрії: на площині і в просторі. Нині апарат векторної алгебри є досить дієвим при вивченні шкільного курсу математики, геометрії зокрема. У шкільному курсі геометрії під вектором розуміють напрямлений відрізок. Вивчають лінійні операції над векторами: додавання, віднімання і множення на число та їх властивості. Задають вектори як геометричні об'єкти і координатами в прямокутній декартовій системі координат.

Елементи векторної алгебри є окремим розділом у навчальному предметі «Аналітична геометрія», що читається для студентів першого курсу факультету інформаційних технологій і математики Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки, в тому числі і спеціальності «Математика. Освіта». Потрібно готувати майбутніх вчителів математики до професійної діяльності, забезпечивши високий рівень знань та сформувавши вміння застосовувати отримані знання при викладанні математичних дисциплін. Курс аналітичної геометрії тісно пов'язаний з лінійною та векторною алгеброю. Операції над векторами, їх властивості та різні векторні методи розв'язання задач мають бути вивчені ґрунтовно і набуті навички вибору ефективного методу для кожного конкретного випадку.

Мета роботи: розглянути суть методу «замкнутого контура» та проілюструвати його застосування до розв'язання задач аналітичної геометрії.

Результати дослідження

За допомогою векторів розв'язується багато різноманітних задач, в тому числі і таких, що не мають іншого способу розв'язання. Серед векторних методів, який має широке застосування у різних галузях, особливо механіці, варто виділити метод замкнутого векторного контура. За методом кінематичного аналізу механізму, положення кожної ланки визначається пов'язаним з ним вектором так, що послідовність цих векторів утворює один або декілька замкнутих контурів. Умова замкнутості векторних контурів для плоского механізму дозволяє визначити шукані величини. Дослідження руху і кінематичного синтезу плоских і просторових стрижневих механізмів також здійснюється із застосуванням теорії замкнутих векторних контурів. При цьому кожній ланці механізму ставиться у відповідність вектор визначеного напряму.

Цей метод може бути віднесений до геометричних методів. Він ґрунтується на простому апараті аналітичної геометрії і, зокрема, теорії замкнутих векторних контурів в тривимірному просторі, що робить його доступним для широкого практичного застосування.

Аналітичний метод замкнутих векторних контурів застосовується при визначенні траєкторій точок, швидкостей та прискорень ланок і точок ланок плоских механізмів. Всю схему механізму можна розглядати як складену із низки замкнутих векторних контурів, кожен з яких характеризує приєднану структурну групу спільно з вихідним механізмом. Для кожного контуру складають векторні рівняння замкнутості. Проектуючи вектори на осі координат, отримують рівняння у скалярному вигляді [1].

Розглянемо застосування методу «замкнутого векторного контура» до розв'язання задач аналітичної геометрії.

Вже при вивченні додавання векторів за правилом трикутника записується векторна рівність $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{0}$, яка ілюструє примітивний замкнутий векторний контур. Прикладом складнішого є додавання більшої кількості векторів.

Нехай дано n векторів

$$\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3},\ldots,\overline{a_n}\ .$$

Для того, щоб ламана, що складається з цих векторів, була замкнена, необхідно і достатньо, щоб сума всіх цих векторів («замкнений контур») дорівнювала нулю:

$$\overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}+\ldots+\overline{a_n}=0$$

Задача 1.

Довести, що можна побудувати трикутник, сторони якого рівні медіанам даного трикутника.

Доведення. Позначимо M_1,M_2,M_3 - середини сторін BC, AC, AB трикутника ABC (рис. 1).

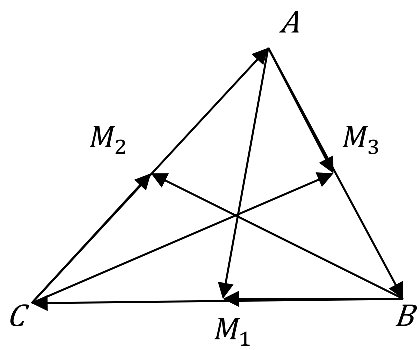

Рис.1

Можемо записати :

$$\overline{AM_1}=\overline{AB}+\overline{BM_1}\ ,$$

$$\overline{BM_2}=\overline{BC}+\overline{CM_2}\ ,$$

$$\overline{CM_3}=\overline{CA}+\overline{AM_3}\ .$$

Додавши ці рівності почленно, отримаємо

$$\overline{AM_1}+\overline{BM_2}+\overline{CM_3}=\overline{AB}+\overline{BM_1}+\overline{BC}+\overline{CM_2}+\overline{CA}+\overline{AM_3}=$$

$$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CA}=\frac{3}{2}\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}\right)=\frac{3}{2}\cdot\bar{0}=\bar{0}$$

Отже, $\overline{AM_1}+\overline{BM_2}+\overline{CM_3}=\bar{0}$, а це значить, що твердження задачі доведено.

Задача 2.

Дано два відрізки AB і CD. Точка $M\in AB$ і точка $N\in CD$ ділять відрізки AB і CD відповідно на відрізки, відношення яких дорівнює k. Виразити вектор $\overline{MN}$ через вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.

Розв'язання. Задача може бути розв'язана з допомогою формули

$$\overline{XC}=\frac{n}{m+n}\overline{XA}+\frac{m}{n+m}\overline{XB}$$

і «проколу» вектора. Ми розглянемо її розв'язання з допомогою «замкнутого контуру».

Розглянемо чотирикутники $NMAC$ І $NMBD$(рис. 2).

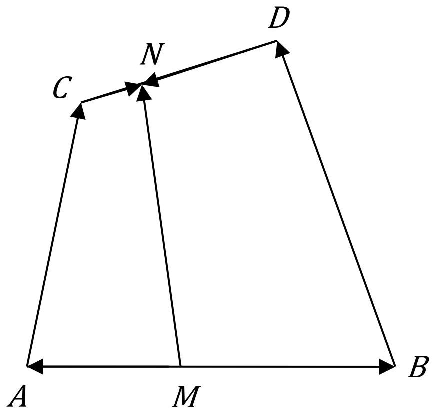

Рис. 2

Запишемо рівності:

$$\overline{MN}=\overline{MA}+\overline{AC}+\overline{CN},$$
$$\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BD}+\overline{DN}.$$

Покладемо $k=\frac{m}{n}$. Тоді $\frac{1}{m}\overline{MN}=\frac{1}{m}\overline{MA}+\frac{1}{m}\overline{AC}+\frac{1}{m}\overline{CN}$,

$$\frac{1}{n}\overline{MN}=\frac{1}{n}\overline{MB}+\frac{1}{n}\overline{BD}+\frac{1}{n}\overline{DN}.$$

Додавши, отримаємо $\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\overline{MN}=\frac{1}{m}\overline{MA}+\frac{1}{n}\overline{MB}+\frac{1}{m}\overline{AC}+\frac{1}{n}\overline{BD}+\frac{1}{m}\overline{CN}+\frac{1}{n}\overline{DN}$.

Оскільки $\left|\overline{MA}\right|=\frac{mAB}{m+n},\left|\overline{MB}\right|=\frac{nAB}{m+n}$, то $\frac{1}{m}\overline{MA}+\frac{1}{n}\overline{MB}=\bar{0}.$

Аналогічно, $\frac{1}{m}\overline{CN}+\frac{1}{n}\overline{DN}=\bar{0}.$

Тоді вектор $\overline{MN}$ виражається через вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ так:

$$\overline{MN}=\frac{n}{n+m}\overline{AC}+\frac{m}{n+m}\overline{BD}=\frac{1}{1+k}\overline{AC}+\frac{k}{k+1}\overline{BD}.$$

Задача 3.

На сторонах довільного трикутника ABC поза ним побудовані довільні паралелограми: $ABB_1A_1, BCC_1B_2, CAA_2C_2$. Довести, що з відрізків A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 можна побудувати трикутник.

Доведення. Розглянемо замкнутий контур $A_1B_1B_2C_1C_2A_2$ (рис. 3).

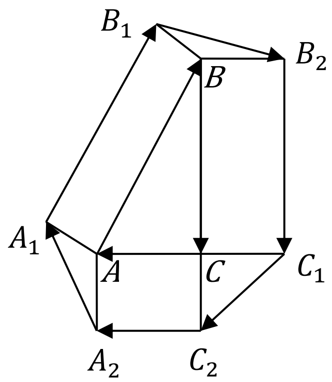

Рис.3

Маємо $\overline{A_1B_1}+\overline{B_1B_2}+\overline{B_2C_1}+\overline{C_1C_2}+\overline{C_2A_2}+\overline{A_2A_1}=\overline{0}$. Так як вектори $\overline{AB}$ і $\overline{A_1B_1}$, $\overline{BC}$ і $\overline{B_2C_1}, \overline{CA}$ і $\overline{C_2A_2}$ попарно рівні і $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=\overline{0}$, то $\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}+\overline{A_2A_1}=\overline{0}$, а ця векторна рівність показує неколінеарність векторів $\overline{B_1B_2}, \overline{C_1C_2}, \overline{A_1A_2}$, тому з них можна скласти трикутник, якщо ж колінеарні , то трикутник скласти неможна.

Задача 4.

Дано замкнуту неплоску ламану з шістьма ланками. Довести, що якщо протилежні ланки ламаної попарно паралельні, то їх довжини попарно рівні.

Розв'язання. Згідно умови задачі маємо:

$$\overline{DE}=k\overline{AB}, \overline{EF}=l\overline{BC}, \overline{FA}=m\overline{CD} \text{ (рис.4).}$$

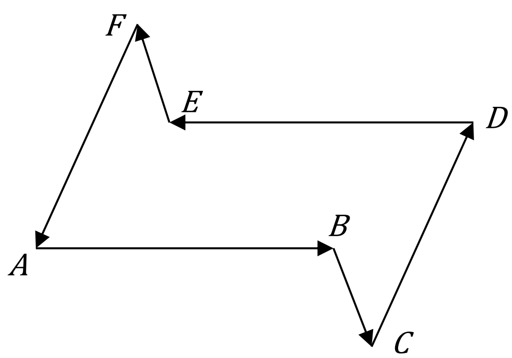

Рис.4

Розглянемо «замкнутий контур»: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA}=\overline{0}$.

Звідси отримаємо:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+k\overline{AB}+l\overline{BC}+m\overline{CD}=\overline{0},$$

або

$$(k+1)\overline{AB}+(l+1)\overline{BC}+(m+1)\overline{CD}=\overline{0}$$

Вектори $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD}$ не компланарні (у випадку компланарності дана ламана була б плоскою).

Отже, коефіцієнти у розкладі нульового вектора за векторами $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD}$ рівні нулю, тобто:

$$k=-1, l=-1, m=-1.$$

В такому випадку довжини протилежних ланок ламаної рівні.

Задача 5.

Дано трикутник ABC (рис.5).

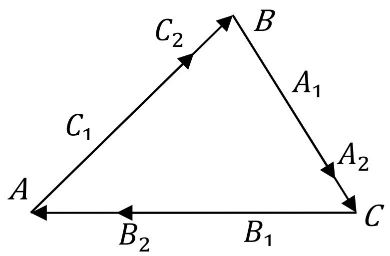

Рис. 5

На прямих BC, CA, AB дано відповідні пари точок $(A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2)$ такі, що

$$\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\overline{0}$$

Довести, що

$$\frac{BC}{A_1A_2}=\frac{CA}{B_1B_2}=\frac{AB}{C_1C_2}.$$

Доведення. Відомо, що $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{0}$.

Нехай

$$\overline{A_1A_2}=m\overline{BC},$$
$$\overline{B_1B_2}=p\overline{CA},$$
$$\overline{C_1C_2}=k\overline{AB},$$

Тоді

$$\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=k\overline{AB}+p\overline{CA}+m\overline{BC}=\overline{0},$$

$$\left[\overline{AB}+\frac{p}{k}\overline{CA}+\frac{m}{k}\overline{BC}=\overline{0}\right]'$$

і $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{0}$

Звідси $k=p=m$, тобто

$\frac{BC}{A_1A_2}=\frac{CA}{B_1B_2}=\frac{AB}{C_1C_2}$, що доводить твердження задачі.

Задача 6.

Дано чотирикутник $ABCD$. Довести, що точки перетину медіан трикутників ABC, BCD, CDA, DABє вершинами чотирикутника, гомотетичного даному. Знайти коефіцієнт гомотетії.

Доведення. За правилом додавання векторів (рис. 6) можемо записати:

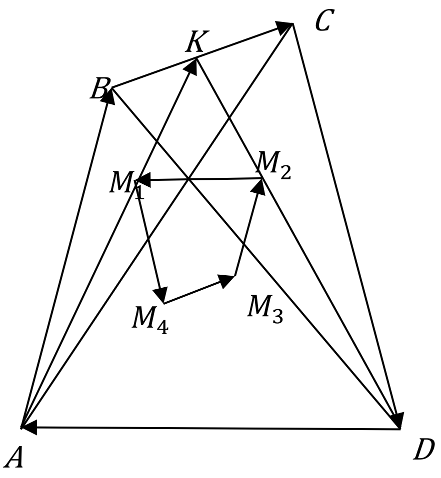

Рис. 6

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=\bar{0}$$

та $$\overline{M_1M_4}+\overline{M_4M_3}+\overline{M_3M_2}+\overline{M_2M_1}=\bar{0}$$

Нехай K - середина BC. Оскільки вектори $\overline{M_2M_1},\overline{DA}$ однаково напрямлені, то

$$\frac{\overline{M_2M_1}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{M_1K}}{\overline{AK}}=\frac{1}{3}$$

Отже, $\overline{M_2M_1}=\frac{1}{3}\overline{DA}$.

Аналогічно : $\overline{M_1M_4}=\frac{1}{3}\overline{CD}$, $\overline{M_4M_3}=\frac{1}{3}\overline{BC}$ та $\overline{M_3M_2}=\frac{1}{3}\overline{AB}$.

Отже,

$$\overline{M_1M_4}+\overline{M_4M_3}+\overline{M_3M_2}+\overline{M_2M_1}=\frac{1}{3}\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}\right)=\bar{0}.$$

Значить чотирикутник $M_1M_2M_3M_4$ гомототичний чотирикутнику $ABCD$ з коефіцієнтом гомотетії $k=\frac{1}{3}$.

Задача 7.

Довести, що якщо в тетраедрі $ABCD$ протилежні ребра попарно перпендикулярні, то

$$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$$

Доведення. Зрозуміло, що $\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CB}+\overline{BA}=\bar{0}$ **(**рис**.** 7**)**

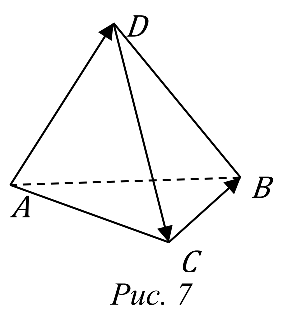

Рис. 7

$$\overline{AD}+\overline{CB}=\overline{AB}+\overline{CD},$$

або

$$\left|\overline{AD}\right|^2+\left|\overline{BC}\right|^2+2\overline{AD}\cdot\overline{CB}=\left|\overline{AB}\right|^2+\left|\overline{CD}\right|^2+2\overline{AB}\cdot\overline{CD}.$$

Враховуючи умову, отримуємо

$$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$$

Аналогічно доводимо, що

$$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$$

Отже, $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

Задача 8.

Довести, що з половини діагоналей довільного чотирикутника і будь-якої з його середніх ліній можна скласти трикутник.

Розв'язання Нехай $ABCD$ - деякий чотирикутник (рис. 8), M - середина відрізка AB, N - середина CD.

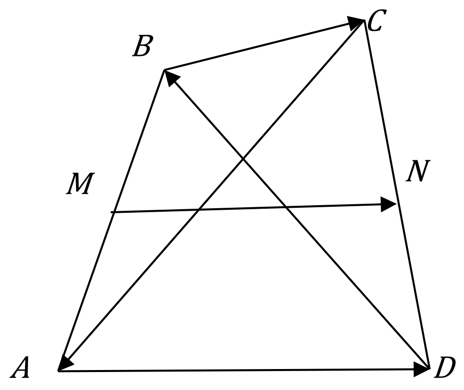

Рис. 8

$$\overline{MN}=\frac{1}{2}\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)$$

Тому

$$\frac{1}{2}\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{DB}+\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{DB}+\frac{1}{2}\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(\overline{CA}+\overline{DB}+\overline{AD}+\overline{BC})=\frac{1}{2}(\overline{CB}+\overline{BC})=\bar{0}.$$

Згідно умови замкнутості відрізки з довжинами $\frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|,\frac{1}{2}\left|\overline{BD}\right|$ і $\left|\overline{MN}\right|$ утворюють трикутник.

Висновки

Вектор як математичне поняття ввійшов у шкільну математику і має широке застосування до розв'язання різних типів задач. Розглянутий метод є одним із ефективних векторних методів, за допомогою якого спрощується розв'язання геометричних задач. Майбутньому вчителю математики буде корисно знати його суть і вміти, при необхідності, застосовувати на практиці, навчати своїх учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. https://mash-xxl.info/info/284209/\
2. Готман Э.Г., Скопец З.А Задача одна - решения разные / Э.Г. Готман, З.А Скопец .- К.: Радянська школа. - 1988.— 173 с.
3. Єгорова Г.О. Векторний і координатний методи розв'язування задач / Г.О. Єгорова // Математика в школе. — 2001. — №5. — С. 5 – 11г

Марчук Артем — студент групи 52МО, факультет інформаційних технологій та математики, Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, e-mail: htt.marchuk@gmail.com

Кравчук Ольга Мусіївна — доцент кафедри алгебри і математичного аналізу, факультет інформаційних технологій та математики, Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, e-mail: olikr57@ukr.net

Marchuk Artem - student of the group 52MO, Faculty of Information Technology and Mathematics, Lesya Ukrainka Eastern European National University, Lutsk, e-mail

Olga Kravchuk - Assistant Professor of the Department of Algebra and Mathematical Analysis, Faculty of Information Technology and Mathematics, Lesya Ukrainka Eastern European National University, Lutsk,