

АСИМПТОТИЧНИЙ ХАРАКТЕР ФОРМАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗЧИСЛЕННОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПОХІДНІЙ

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Анотація

У роботі побудовано формальний розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром при похідній й доведено асимптотичний характер такого розв'язку (у розумінні М.Крилова-М.Боголюбова-Ю.Митропольського) за допомогою методу «укорочення» О.Жаутикова.

Ключові слова: зчисленні системи диференціальних рівнянь, малий параметр, формальний і точний розв'язки, асимптотичні методи, метод «укорочення».

Abstract

In this paper a formal solution of a countable system of second order ordinary differential equations with a small parameter multiplying the second order derivative is constructed. We prove the asymptotic nature of such a solution (according to Kyrilov-Bogolyubov-Mitropolsky definition) using Zhautykov "shortening" method.

Keywords: countable system of second order ordinary differential equations, small parameter, formal and exact solutions, asymptotic methods, method of "shortening".

Вступ

Диференціальні рівняння (ДР) дають змогу знайти залежність між величинами та швидкостями їх зміни у багатьох науках. Однак проінтегрувати їх у скінченому вигляді вдається зазвичай у небагатьох випадках. Задача ще більше ускладнюється, якщо досліджується не одне ДР, а їх системи. Тому актуалізуються наближені методи, зокрема асимптотичні, які дають змогу отримати аналітичний вираз наближеного розв'язку і, відповідно, виконати дослідження його поведінки на області зміни незалежної змінної. Академік Ю. Митропольський, базуючись на асимптотичних методах М. Крилова та М. Боголюбова, створив метод, який дозволив йому досліджувати нестационарні коливальні процеси в системах з одним і багатьма степенями вільності. У середині ХХ ст. С. Фещенко розробив метод асимптотичного представлення розв'язків ДР другого порядку з повільнозмінними коефіцієнтами. Пізніше теорія скінченних систем диференціальних рівнянь (СДР) з повільнозмінними коефіцієнтами була розвинена в працях академіка М. Шкіля та його учнів, зокрема Г. Завізіона, С. Кондакової, І. Конета, В. Лейфури, Т. Мейлієва, Ю. Підченка, М. Сотніченка, І. Старуна, В. Яковця та інших.

Особливе місце посідає теорія нескінченних систем лінійних диференціальних рівнянь (СЛДР) у зв'язку з тими застосуваннями, які вона має в питаннях інтегрування звичайних ДР, в теорії інтегральних рівнянь, і, особливо, при розв'язанні граничних задач математичної фізики. ДР у банаховому просторі вивчали Ю. Далецький і С. Крейн [4], М. Ковтонюк [2].

Зауважимо, що можна довести асимптотичний характер побудованого формального розв'язку зчисленної СЛДР, використавши методіку “укорочення” систем, яка розглядалась у працях К. Персидського, О. Жаутикова [1]. Суть методу полягає в тому, що розв'язування зчисленної СДР зводиться до розв'язування так званої “укороченої” СДР, причому розв'язок зчисленної системи отримується з розв'язку “укороченої” системи граничним переходом при $n \rightarrow \infty$.

Результати дослідження

Розглянемо в нескінченномірному просторі m рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей однорідну зчисленну СДР другого порядку

$$\varepsilon^h \frac{d^2 x}{d\tau^2} + A(\tau, \varepsilon)x = 0, \quad (1)$$

де $x(\tau, \varepsilon)$ – шуканий нескінченномірний вектор, $A(\tau, \varepsilon) = [a_{kj}(\tau, \varepsilon)]_{k,j=1}^\infty$ – дійсна нескінченна матриця, елементами якої є дійсні функції дійсної змінної $\tau \in [0, L]$, ε – малий дійсний параметр, $h \in \mathbb{N}$, $h > 1$. Відносно коефіцієнтів рівняння (1) припустимо, що: 1) матрицю $A(\tau, \varepsilon)$ можна

розкласти за степенями параметра ε : $A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^\infty \varepsilon^s A_s(\tau) = A_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau) + \varepsilon^2 A_2(\tau) + \dots$,

причому цей розклад вважатимемо асимптотичним, тобто норма $\left\| A(\tau, \varepsilon) - \sum_{s=0}^m \varepsilon^s A_s(\tau) \right\| \leq C \varepsilon^{m+1}$, де

C – деяка стала, що не залежить від ε ; 2) спектр нескінченної матриці $A_0(\tau)$ точковий $A_0(\tau) = \text{diag}\{\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \dots\}$, $\lambda_j(\tau) \neq \lambda_k(\tau)$ для всіх $j \neq k$, $j, k \in \mathbb{N}$; 3) матриці $A_s(\tau) \in C_{[0;L]}^n$;

4) ряди $\frac{d^s a_j(\tau, \varepsilon)}{d\tau^s} = \sum_{l=1}^\infty \frac{d^s |a_{jl}(\tau, \varepsilon)|}{d\tau^s}$ рівномірно збіжні $\forall \tau \in [0, L]$, $s = 1, 2, \dots, k$; 5) $\left| \frac{d^s a_j(\tau, \varepsilon)}{d\tau^s} \right| \leq \gamma_s$,

$\forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ де $\gamma_s > 0$ – сталі, що не залежать від τ і ε ; 6) $|\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)| \geq d > 0$, $\forall j = 2, 3, \dots$

Вказані умови забезпечують існування розв'язку зчисленної СДР (1), тобто нами доведена:
ТЕОРЕМА 1. Якщо виконуються умови 1-6, то у випадку $h \in \mathbb{N}$ ($h \geq 2$) існує формальний частинний розв'язок зчисленної СДР (1), який можна подати у вигляді:

$$x(\tau, \mu) = u(\tau, \mu) e^{i\mu^{-h} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_1(t)} dt}, \text{ де } u(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^\infty \mu^s u_s(\tau) \text{ – нескінченномірний вектор, } \varepsilon = \mu^2.$$

Отже, через задану точку $(\tau_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots)$ області проходить єдиний розв'язок $x(\tau, \mu) = \{x_1(\tau, \mu), x_2(\tau, \mu), \dots\}$ даної системи, причому цей розв'язок є обмежений, одностайно неперервний відносно τ і μ й відносно своїх початкових значень.

Далі, для нашої зчисленої СДР розглянемо так звану “укорочену” систему, яка отримується з (1), якщо прирівняти до нуля всі шукані функції, починаючи з $(2n+1)$ -ої, і відкинувши всі рівняння, починаючи з $(2n+1)$ -го. Нехай $y(\tau, \mu) = \{y_{1,2n}(\tau, \mu), y_{2,2n}(\tau, \mu), \dots, y_{2n,2n}(\tau, \mu)\}$ – розв'язок “укороченої” СДР (1), який задовольняє початкову умову: при $\tau = \tau_0$ маємо точку $(y_1^{(0)}, \dots, y_{2n}^{(0)})$. Тоді згідно відомих теорем О.С. Жаутикова [1] розв'язок “укороченої” системи рівнянь задовольняє умову $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{s,2n}(\tau, \mu) = y_s(\tau, \mu)$, $s = 1, 2, \dots, 2n$, або $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n > n_0$ і $\forall \tau \in [0; L]$ виконується нерівність $|y_{s,2n}(\tau, \mu) - y_s(\tau, \mu)| < \varepsilon$, $s = 1, 2, \dots, 2n$, причому граничний перехід є рівномірним по τ . А до “укороченої” системи, яка є системою $2n$ рівнянь з $2n$ невідомими, можна застосувати теорію, розроблену в працях М. Шкіля, Т. Мейлієва [3], тобто знайти формальний розв'язок та встановити його асимптотичний характер.

ТЕОРЕМА 2. Якщо $x(\tau, \mu) = \text{colon}\{x_1(\tau, \mu), x_2(\tau, \mu), \dots\}$ розв'язок зчисленної СДР (1); $y(\tau, \mu)$ – розв'язок «укороченої» СДР, $y_m(\tau, \mu)$ – m -наближений розв'язок «укороченої» системи,

тоді $\forall \varepsilon_0 > 0$ існує стала $C > 0$, яка не залежить від μ така, що $\forall \tau \in [0; L], \forall \mu \in (0; \mu_0]$ правильна нерівність $\left| x_s(\tau, \mu) - y_{s,2n}^{(m)}(\tau, \mu) \right| < \varepsilon_0 + C\mu^{m+2h}$, $n \rightarrow \infty, s = 1, 2, \dots$.

Висновки

Побудовано формальний розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь вигляду (1) у випадку простого дискретного спектру матриці $A_0(\tau)$, досліджено асимптотичний характер його (у розумінні М.Крилова-М.Боголюбова-Ю.Митропольського). Доведено теореми 1 і 2.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Жаутыков О.С. Решение краевой задачи для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений / О.А.Жаутыков// Украинский математический журнал. – 1960. – Т. 12. – С. 157-164.
2. Ковтонюк М.М. Асимптотическое поведение решения одной бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений /М.М.Ковтонюк // Украинский математический журнал. – 1983. – Т. 35. – №5 – С53-59.
3. Мейлиев Т.К. Об асимптотическом представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной / Т.К.Мейлиев, Н.И.Шкиль. – В кн. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. К.: Наукова думка, 1979. – С.124-130.
4. Фещенко С.Ф. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений /С.Ф.Фещенко, Н.И.Шкиль, Л.Д.Николенко. – К.: Наукова думка, 1966. – 252 с.

Ковтонюк Мар'яна Михайлівна – доктор педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського; м.Вінниця, e-mail: kovtonyukmm@gmail.com.

Kovtonyuk Mariana Mikhailovna - Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Mathematics and Informatics of the Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University; Vinnytsia, e-mail: kovtonyukmm@gmail.com.