

В. М. Михалевич¹
В. Вуйцик²
В. О. Краєвський¹
В. В. Василюх¹
В. В. Шевченко¹

ЗАДАЧА ПРО ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК З ТЕОРІЄЮ ПІДСУМОВУВАННЯ ПОШКОДЖЕНЬ

¹Вінницький національний технічний університет,

²Технический университет «Люблинская политехника», Польша, Люблин

Анотація

Відстань від початку координат до кривої використовується, як показник для ранжування певної сім'ї двопараметричних функцій, що може бути використаний у теорії підсумовування пошкоджень. Здійснено порівняння різних способів знаходження вказаної відстані, що базуються на використанні: рівняння нормалі до кривої, функції Лагранжа; екстремуму функції однієї змінної. Розроблено інформаційні технології визначення та дослідження властивостей відстані в залежності від параметрів певної функції та проаналізовано знайдені результати для одного типу кривих.

Ключові слова: теорія підсумовування пошкоджень, відстань від точки до кривої, нормаль та дотична до кривої, умовний екстремум, метод множників Лагранжа, Maple.

Abstract

The distance from the origin to the curve is used as an index for the ranking a certain family of functions that can be used in the theory of damage summation. Different methods of determining the indicated distance are compared, based on the use of the normal to the curve equation; the Lagrange function; extremum of a function of one variable. Information technologies for determining and investigating the properties of distance are developed depending on the parameters of a certain function and the results determined for one type of curves are analyzed.

Keywords: theory of damage summation, from the origin to the curve, normal and tangent to curve, constrained extremum, Lagrange method of multipliers, Maple.

Вступ

У працях [1, 2, 3] розроблено та досліджено моделі підсумовування пошкоджень спадкового типу. Це дослідження показало, що вони описують широке коло процесів з різних галузей. Численні перевірки адекватності побудованих моделей здійснено відносно високотемпературного пластичного деформування матеріалів за різних режимів зміни швидкості деформацій [1, 2, 3, 4]. Виявлено, що за деяких умов аналогічні закономірності мають місце і в процесах накопичення втоми спортсмена, що долає певну дистанцію [5, 6].

У працях [7, 8, 9, 10, 11] здійснено постановку та розв'язання оптимізаційних задач в теорії підсумовування пошкоджень спадкового типу. З використанням термінологічної лексики задачі про розподіл сил спортсмена, що долає певну дистанцію, сутність постановки задачі полягає у знаходження закону зміни швидкості пересування спортсмена для досягнення фінішу за мінімальний час. Умова співпадання моменту досягнення фінішу з повною витратою ресурсу спортсмена призводить до отримання варіаційної задачі ізопериметричного типу з обмеженнями у вигляді інтегральної рівності та нерівності.

У працях [7, 8] доведено, що рівняння Ейлера-Лагранжа для сформульованої задачі не є диференціальним, і інших, крім тривіального, розв'язків не існує.

Показано, що відносно класу кусково-сталих функцій варіаційна задача може бути зведена до задачі нелінійного програмування. Такі задачі розв'язано для 2-х, 3-х, ... та 6-и ступеневої зміни швидкості деформації. Сформульовано і програмно реалізовано випадок k -ступеневого деформування [10].

Застосування моделювання закономірностей підсумовування пошкоджень в матеріалах під час високотемпературного деформування для отримання виробів методами СВС-баротермії наведено у [12]. У праці [13] запропоновано наближений метод розв'язання задачі нелінійного програмування шляхом представлення закону зміни швидкості у вигляді багатоступеневої функції із однаковою тривалістю ступенів та із зміною швидкості за траєкторією, що задається двопараметричною додатною монотонно спадною опуклою донизу функцією.

У [14] в результаті співставлення спадкової теорії підсумовування пошкоджень із задачею про таутохрону встановлено закон зміни швидкості деформацій, що відповідає необмеженому зростанню пластичної деформації. Іншими словами виявлено умови, за яких матеріал виявляє властивості надпластичності.

Під час дослідження та аналізу властивостей моделей підсумовування пошкоджень, що породжуються додатними монотонно спадними опуклими донизу функціями виникає необхідність пошуку показника, за яким можна б було ранжувати ці функції. За такий показник пропонується вибрати відстань від початку координат до заданої кривої.

Мета роботи [15] полягала в розробці способів визначення відстані від початку координат до зазначеного типу кривих та дослідженні і аналізу отриманих результатів. В цій роботі вказані питання викладено в більш повному обсязі.

Результати дослідження

Постановка задачі

У праці [14] виявлено унікальні властивості моделі підсумовування пошкоджень для швидкостей деформацій, що представлені співвідношенням

$$y(t) = \frac{k}{\sqrt{t}}, \quad (1)$$

де $k > 0$ - деяка стала.

Надалі розглядатимемо більш загальну функцію

$$y(t) = \frac{k}{t^\alpha}, \quad k, \alpha, t > 0. \quad (2)$$

На рис.1 представлена сім'я кривих, що відповідають різним значенням параметрів цієї функції. Звичайно, під час дослідження можуть виникати й інші функції з деякими властивостями, що подібні функції (2).

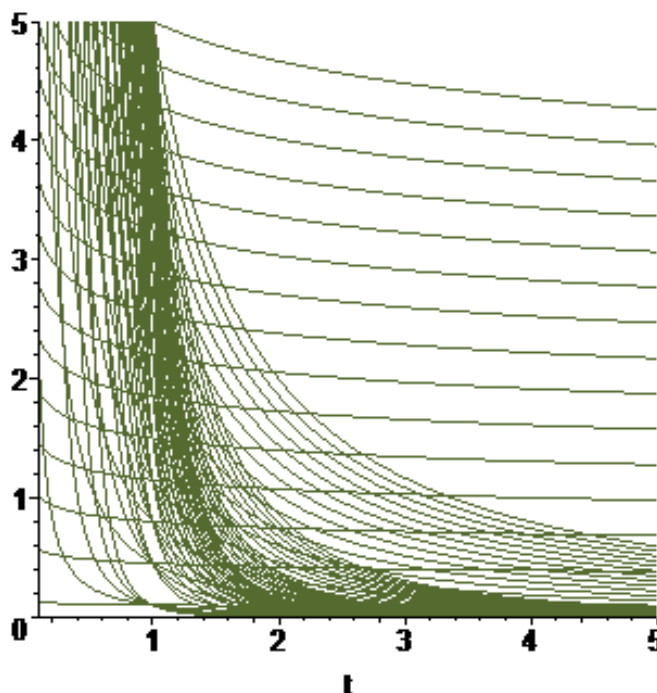


Рис. 1 Сім'я кривих двопараметричної функції: розрахунок за (2), $k, \alpha \in [0,1; 5]$.

Необхідно знайти відстань від початку координат до функції, що задана рівнянням (2) (див. рис.2).

Існує декілька способів розв'язання поставленої задачі. Ці способи базуються на двох властивостях відрізка OA , довжина якого дорівнює шуканій відстані: 1) цей відрізок співпадає з напрямом нормального вектора до кривої (2), що проведений з початку координат; 2) довжина відрізка OA є найменшою серед інших відрізків OM , де $M\left(t, \frac{k}{t^\alpha}\right)$ - поточна точка кривої.

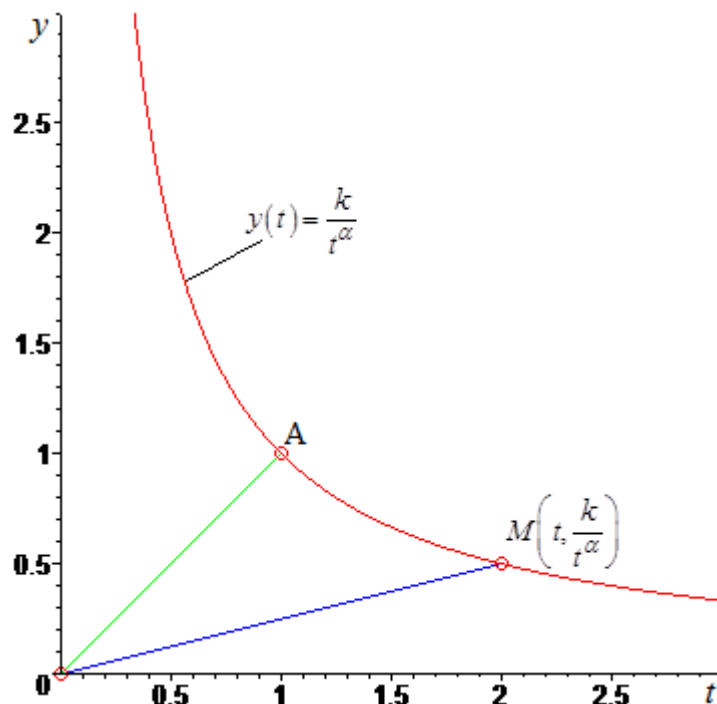


Рис. 2. Відстань від початку координат до кривої [15].

Спосіб 1. Використання рівняння нормалі до кривої на площині

Нехай нормаль до кривої проходить через т. А, тоді її загальне рівняння матиме вигляд [15]

$$Y(T) = y(t_A) - \frac{1}{y'(t_A)} \cdot (T - t_A), \quad (3)$$

і з урахуванням (2)

$$Y(T) = \frac{k}{t_A^\alpha} + \frac{1}{k \cdot \alpha} \cdot t_A^{\alpha+1} \cdot (T - t_A). \quad (4)$$

За умовою пряма (4) проходить через початок координат. З урахуванням цієї умови з (4) отримаємо

$$t_A = e^{\frac{\ln(k^2 \alpha)}{2 \cdot (\alpha+1)}}. \quad (5)$$

Шукана відстань дорівнює

$$OA = \sqrt{\left(e^{\left(\frac{1}{2} \frac{\ln(k^2 \alpha)}{\alpha+1} \right)} \right)^2 + \frac{k^2}{\left(\left(e^{\left(\frac{1}{2} \frac{\ln(k^2 \alpha)}{\alpha+1} \right)} \right)^\alpha \right)^2}}. \quad (6)$$

Співвідношення отримано за допомогою системи комп'ютерної математики (СКМ) Maple. Його

спрощення за допомогою СКМ Maple вимагає значного досвіду використання відповідних команд. Після спрощень співвідношення (6), отримаємо

$$OA = z(k, \alpha) = k \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot \ln(k^2 \alpha)}{2(1+\alpha)}} \cdot \sqrt{1+\alpha}. \quad (7)$$

Спосіб 2. Метод множників Лагранжа

Квадрат відстані від початку координат до поточної точки кривої $M(t, y)$

$$OM^2 = t^2 + y^2. \quad (8)$$

Знаходження значень t, y , що мінімізують відстань OM зводиться до мінімізації функції Лагранжа

$$L(t, y, \lambda) = t^2 + y^2 + \lambda \cdot \left(y - \frac{k}{t^\alpha} \right). \quad (9)$$

Визначимо частинні похідні

$$\begin{cases} \frac{\partial L(t, y, \lambda)}{\partial t} = 2 \cdot t + \frac{\lambda \cdot \alpha \cdot k}{t^{\alpha+1}} = 0, \\ \frac{\partial L(t, y, \lambda)}{\partial y} = 2 \cdot y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L(t, y, \lambda)}{\partial \lambda} = y(t) - \frac{k}{t^\alpha} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Отримали систему трьох нелінійних рівнянь відносно невідомих t, y, λ . У цьому випадку розв'язок системи легко знайти: з другого рівняння виражаємо λ через y , а з третього - y через t і підставляємо отримані вирази в перше рівняння, отримаємо

$$2 \cdot t + \frac{-2 \cdot \frac{k}{t^\alpha} \cdot \alpha \cdot k}{t^{\alpha+1}} = 0. \quad (11)$$

Розв'язанням останнього рівняння знаходимо

$$t_{\min} = t_A = \left(k^2 \cdot \alpha \right)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}, \quad (12)$$

що тотожно співвідношенню (5).

Спосіб 3. Пошук екстремуму функції однієї змінної.

Праву частину формули (8) переписемо з урахуванням (2), отримаємо

$$f(t) = t^2 + \left(\frac{k}{t^\alpha} \right)^2. \quad (13)$$

Знайдемо похідну та прирівняємо її нулю

$$f'(t) = 2 \cdot t - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{k^2}{t^{2\alpha+1}} = 0. \quad (14)$$

Розв'язання цього рівняння співпадає з формулою (12).

Друга похідна

$$f''(t) = 2 + 2 \cdot \alpha \cdot (2 \cdot \alpha + 1) \cdot \frac{k^2}{t^{2\alpha+2}} > 0, \quad \alpha, t > 0, \quad (15)$$

отже, екстремум має тип мінімуму.

Дослідження формули для відстані

Відстань від початку координат до кривої (2) виражається формулою (7), що залежить від двох параметрів k, α , які і визначають криву (2).

Знайдемо границі

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} z(k, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(k \cdot e^{\frac{\alpha \cdot \ln(k^2 \alpha)}{2(1+\alpha)}} \cdot \sqrt{1+\alpha} \right) = k \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(k^2 \alpha)^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}} = \left[\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{2 \cdot (1+\alpha)} \right) = \frac{1}{2} \right] = 1, \quad (16)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} z(k, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(k \cdot e^{\frac{\alpha \cdot \ln(k^2 \alpha)}{2(1+\alpha)}} \cdot \sqrt{1+\alpha} \right) = \left[\begin{array}{l} \lim_{\alpha \rightarrow +0} 1 + \alpha = 1, \\ \lim_{\alpha \rightarrow +0} (\alpha \cdot \ln(k^2 \alpha)) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(\frac{\ln(k^2 \alpha)}{\frac{1}{\alpha}} \right) = 0 \end{array} \right] = k, \quad (17)$$

Аналогічно знаходимо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z(k, \alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(k \cdot e^{\frac{\alpha \cdot \ln(k^2 \alpha)}{2(1+\alpha)}} \cdot \sqrt{1+\alpha} \right) = \infty, \quad (18)$$

$$\lim_{k \rightarrow +0} z(k, \alpha) = \lim_{k \rightarrow +0} \left(k \cdot e^{\frac{\alpha \cdot \ln(k^2 \alpha)}{2(1+\alpha)}} \cdot \sqrt{1+\alpha} \right) = 0. \quad (19)$$

Визначимо частинні похідні функції $z(k, \alpha)$ та дослідимо їх. Всі обчислення виконаємо в середовищі СКМ Maple [15]:

Diff(z(k, alpha), alpha)=diff(OAd(k, alpha), alpha);

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(k e^{\left(-\frac{\alpha \ln(k^2 \alpha)}{2+2\alpha} \right)} \sqrt{\alpha+1} \right) = k \left(-\frac{\ln(k^2 \alpha)}{2+2\alpha} - \frac{1}{2+2\alpha} + \frac{2\alpha \ln(k^2 \alpha)}{(2+2\alpha)^2} \right) e^{\left(-\frac{\alpha \ln(k^2 \alpha)}{2+2\alpha} \right)} \sqrt{\alpha+1} + \frac{1}{2} \frac{k e^{\left(-\frac{\alpha \ln(k^2 \alpha)}{2+2\alpha} \right)}}{\sqrt{\alpha+1}}$$

lhs(%)=algsubs(exp(-alpha*ln(k^2*alpha)/(2+2*alpha))=EXP, rhs(%));

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(k e^{\left(-\frac{\alpha \ln(k^2 \alpha)}{2+2\alpha} \right)} \sqrt{\alpha+1} \right) = \frac{1}{2} \frac{k EXP(\alpha^2 + \alpha - (\alpha+1) \ln(k^2 \alpha) - (\alpha+1) \alpha)}{(\alpha+1)^{(5/2)}}$$

normal(%);

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(k e^{\left(-1/2 \frac{\alpha \ln(k^2 \alpha)}{\alpha+1} \right)} \sqrt{\alpha+1} \right) = -\frac{1}{2} \frac{k EXP \ln(k^2 \alpha)}{(\alpha+1)^{(3/2)}}.$$

Отже знак похідної визначається знаком логарифма

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(k, \alpha)}{\partial \alpha} &> 0, \quad \alpha < \frac{e}{k^2} \\ \frac{\partial z(k, \alpha)}{\partial \alpha} &< 0, \quad \alpha > \frac{e}{k^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогічним чином знаходимо частинну похідну за параметром k

Diff(OAd(k, alpha), k) = diff(OAd(k, alpha), k);

$$\frac{\partial}{\partial k} \left(k e^{\left(-\frac{\alpha \ln(k^2 \alpha)}{2 + 2\alpha} \right)} \sqrt{\alpha + 1} \right) = e^{\left(-\frac{\alpha \ln(k^2 \alpha)}{2 + 2\alpha} \right)} \sqrt{\alpha + 1} - \frac{2\alpha e^{\left(-\frac{\alpha \ln(k^2 \alpha)}{2 + 2\alpha} \right)} \sqrt{\alpha + 1}}{2 + 2\alpha}$$

lhs(%) = algsubs(exp(-alpha*ln(k^2*alpha)/(2+2*alpha)) = EXP, rhs(%)) ;

$$\frac{\partial}{\partial k} \left(k e^{\left(-\frac{\alpha \ln(k^2 \alpha)}{2 + 2\alpha} \right)} \sqrt{\alpha + 1} \right) = \frac{EXP}{\sqrt{\alpha + 1}}.$$

Отже,

$$\frac{\partial z(k, \alpha)}{\partial k} > 0. \quad (21)$$

Графіки поверхні (7) наведено на рис. 3.

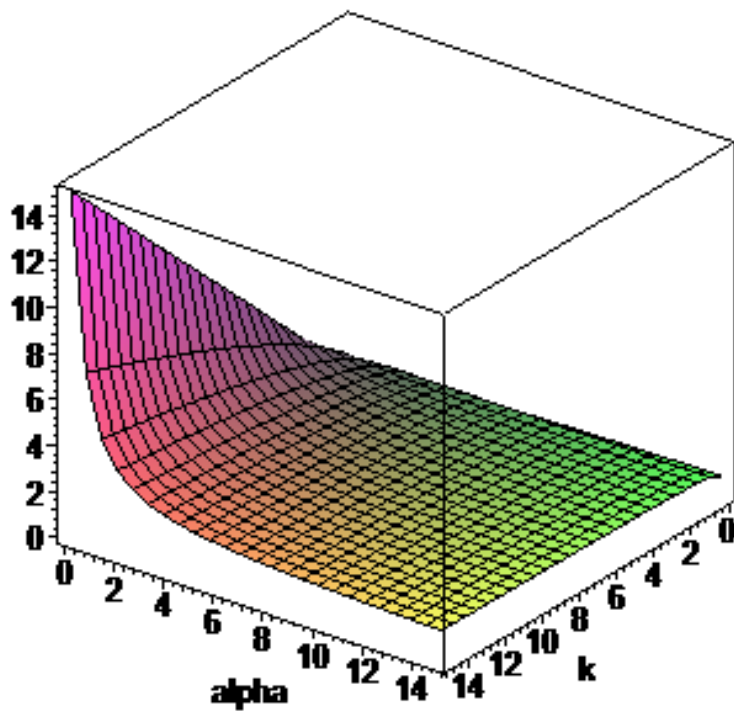
Візуально на цих графіках спостерігається монотонне спадання функції $z(k_i, \alpha)$ для будь-якого фіксованого значення $k = k_i$. В той же час дослідження знака частинної похідної (20) полегшує виявлення областей з особливою поведінкою функції (рис. 4).

На рис. 5 зображені сім'я кривих (2) при $k=1$ і різних значеннях параметра α , нормалі до цих кривих, що проведені з точки початку координат, точки перетину вказаних нормалей та кривих і дотичні до кривих у цих точках.

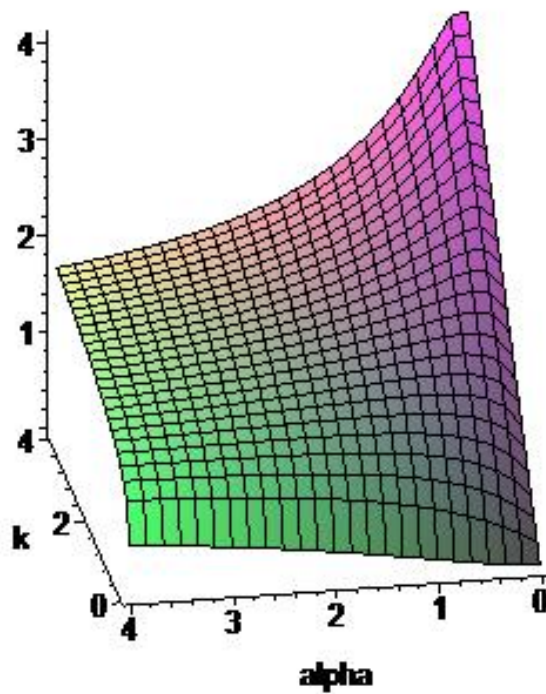
На рис. 6 крім тих самих, що і на рис. 5, сім'ї кривих, нормалей і дотичних, зображена крива залежності координат точок перетину нормалей з кривими.

Висновки

Запропонований показник надає можливість ранжувати певну сім'ю двопараметричних функцій в залежності тільки від однієї змінної. На конкретному прикладі розроблено математичні способи та інформаційні Maple-технології визначення вказаної відстані та її дослідження. Отримані співвідношення можуть бути використані в різних теоретичних та прикладних задачах, зокрема, під час розв'язання задач теорії підсумовування пошкоджень.



a)



a)

Рис. 3. Залежність відстані від початку координат до кривої (2) від параметрів функції (розрахунок за (7)); а, б – різні діапазони зміни аргументів.

```

g10:=plot3d(z(k,alpha),k=0.1..1.4,alpha=exp(1)/k^2..250,orientation=[133,73],axes=frame,color=gray):
g20:=plot3d(z(k,alpha),k=0.1..1.4,alpha=0.1..exp(1)/k^2,orientation=[133,73],axes=frame,style=patch,color=green):
plots[display]([g10,g20]);

```

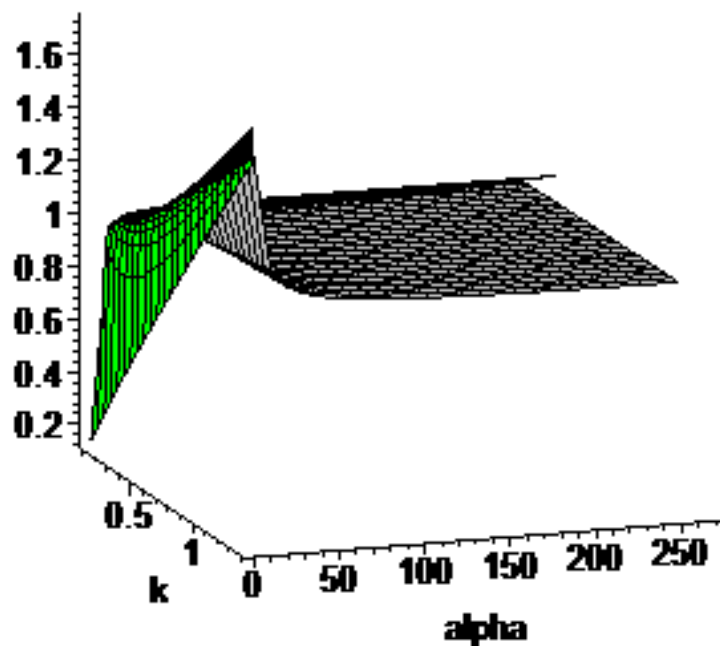


Рис. 4. Область з особливою поведінкою залежності відстані від початку координат до кривої (2) від параметрів функції (розрахунок за (7)).

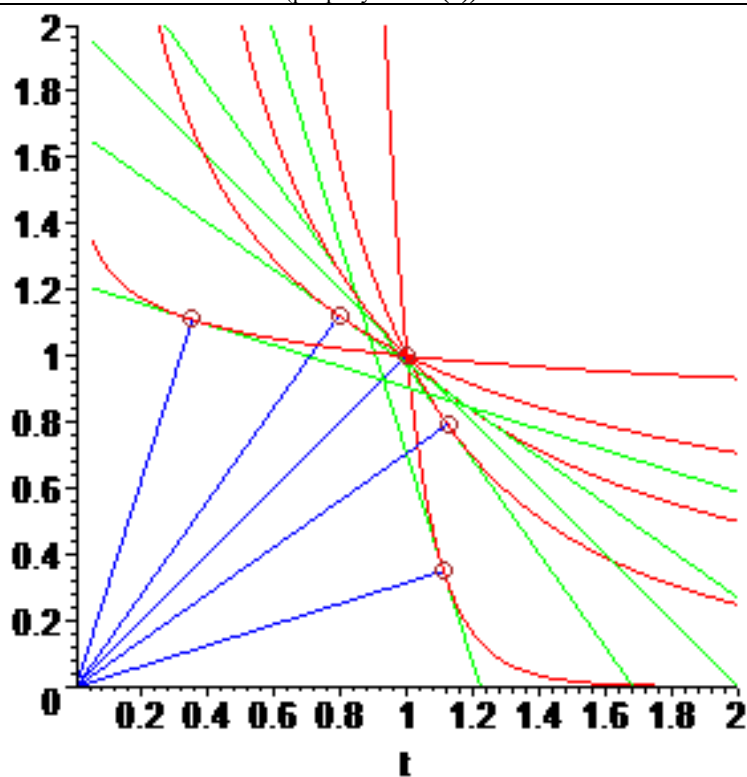


Рис. 5. Сім'я кривих, нормалей, дотичних та точок перетину: червоні лінії – розрахунок за (2) при $k=1$; блакитні лінії – нормалі, розрахунок за (4), (5); зелені лінії – дотичні прямі; $\circ$ – точки перетину нормалей з кривими [15].

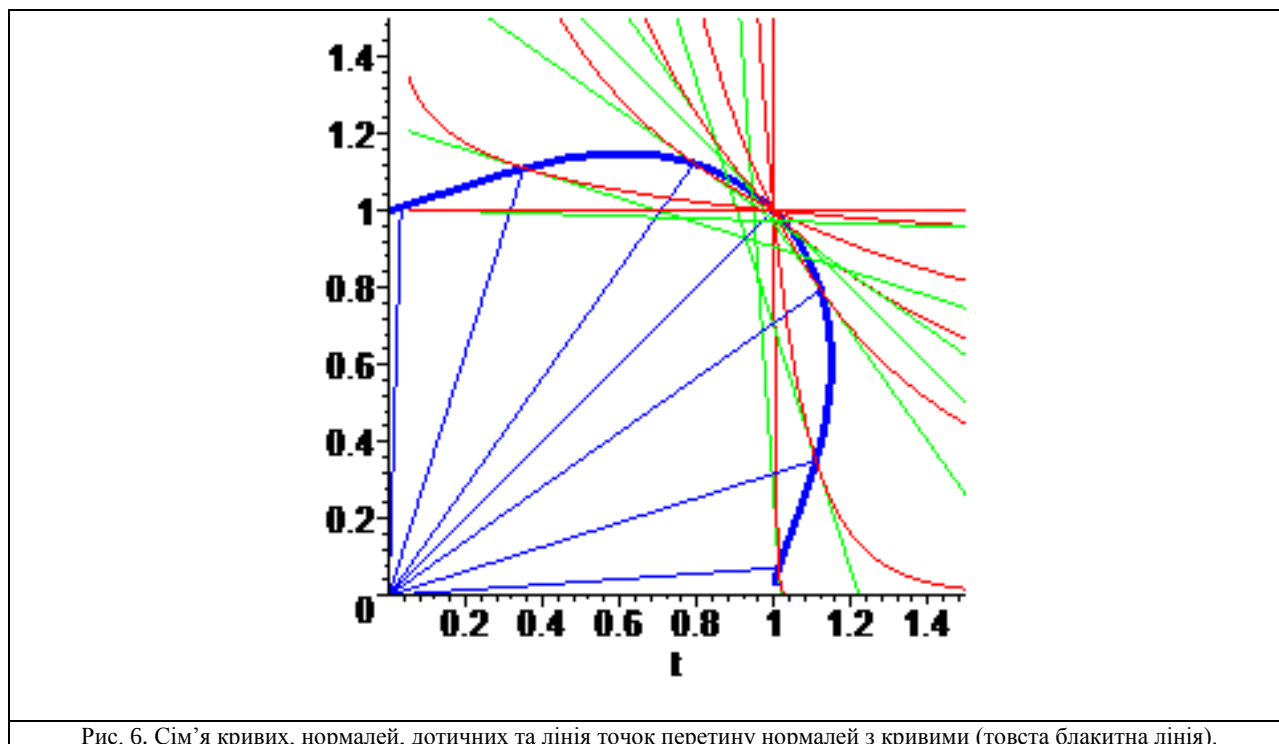


Рис. 6. Сім'я кривих, нормалей, дотичних та ліній точок перетину нормалей з кривими (товста блакитна лінія).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Mikhalevich V. M. The model of ultimate strains during hot deformation / V. M. Mikhalevich // *Izvestia Akademii nauk SSSR. Metally* (5) . - 1991, pp. 89-95.
2. Mikhalevich V. M. Plasticity with cyclic hot working / V. M. Mikhalevich // *Strength of Materials*. - 1994, 26 (6) , pp. 407-412.
3. Mikhalevich V. M. Isothermal blades rolling / V. M. Mikhalevich, V.A. Matvijchuk, V.P. Egorov, I.F. Kornet // *Kuznechno-Shtampovochnoe Proizvodstvo*. – 1994. – № 3. – С. 6–9.
4. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич / Вінниця: "УНІВЕРСУМ-Вінниця", 1998 - 195 с.
5. Михалевич В.М. Моделирование израсходования ресурса спортсмена на дистанции / В. М. Михалевич, В. А.Краевский, К. Ф. Козлова // *Збір. наук. праць «Фізична культура, спорт та здоров'я нації»*. – Вінниця, 2009. – Випуск 8, Том 2. – С. 103-109.
6. Михалевич В.М. Определение оптимальной схемы изменения скорости бега спортсмена на длинной дистанции / В. М. Михалевич, В. А.Краевский, К. Ф. Козлова // *Збір. наук. праць «Фізична культура, спорт та здоров'я нації»*. – Вінниця, 2011. – Випуск 12, Том 2. – С. 155-162.
7. Mikhalevich V. M. Variational problems for damage accumulation models heritable type [Text] / V. M. Mikhalevich, V. O. Kraevskiy // *The nonlinear analysis and application 2009 : materials of the international scientific conference, Kyiv, April 02-04th 2009*. – Kyiv : NTUU "KPI", 2009. – P. 109-110.
8. Михалевич В. М. Постановка и решение оптимизационных задач в теории деформируемости [Текст] / В. М. Михалевич, В. О. Краевский // *Вісник національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Серія "Машинобудування"*. - Київ : НТУУ "КПІ", 2010. - С. 142-145.
9. Михалевич В. М. Оптимізація гарячого циклічного деформування із паузами / В. М. Михалевич, В. О. Краевський // *Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях*. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011. – № 46. – С. 103–106.
10. Михалевич В. М., Краевський В. О. Определение оптимальных параметров многоступенчатой схемы изменения скорости деформаций // *Обработка материалов давлением*, 2011. – №2(27) – с. 10-13.

11. Краєвський В. А. Вариационные задачи в теории деформируемости // В. А. Краєвський, В. М. Михалевич / Надійність і довговічність машин і споруд: Міжнар. наук.-техн. зб. – К.: ІПМіщ. ім. Г.С.Писаренка НАНУ, 2013. – Вип. 37. – С. 90-97.

12. Vaitsekhovich S. M. Theory and technology of barothermal self-propagating high-temperature synthesis based on damage accumulation modeling [Text] / S. M. Vaitsekhovich, V. M. Mikhalevich, V. A. Kraevskii // Powder Metallurgy and Metal Ceramics. - 2013. - Vol. 52, Issue 1. - P. 1-6.

13. Краєвський В.О. Оптимізація швидкісного режиму багатоступеневого гарячого деформування при однаковій тривалості ступенів/ В.О. Краєвський, В. М. Михалевич // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2015. — № 1-2. — С. 46–52.

14. Краєвський В.О. Взаємозв'язок теорії підсумовування пошкоджень із задачею про таутохрону В. О. Краєвський, В. М. Михалевич // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2016. — № 5. — С. 152–158.

15. Михалевич В. М. Способи знаходження та властивості відстані від точки до кривої [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, В. О. Краєвський, В. В. Василишен, В. В. Шевченко // Матеріали НТК ВНТУ ВНТУ, м. Вінниця. — 2018. — Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fitki/all-fitki-2018/paper/view/4037/3306>

Володимир Маркусович Михалевич — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vmykhal@gmail.com

Вальдемар Вуйцик — д-р техн. наук, професор, декан, Технічний університет «Люблінська політехніка», Польща, Люблін, wojcik@elektron.pol.lublin.pl;

Володимир Олександрович Краєвський — доцент каф. вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: kraila@ukr.net;

Вадим Васильович Василишен — студент групи ІПМ-176, факультет машинобудування та транспорту, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail:

Василь Васильович Шевченко — студент групи ІГМ-176, факультет машинобудування та транспорту, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail:

Mykhalevych Volodymyr M. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair for Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, vmykhal@gmail.com

Wójcik Waldemar — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Dean of admissions, National University «Lubelska Politechnika», Poland, Lublin, wojcik@elektron.pol.lublin.pl;

Kraievskiy Volodymyr O. - Ph.D., Associate Professor, Department of Mathematics Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: kraila@ukr.net.

Vasylyshen Vadym V. — Student of the Faculty of Mechanical Engineering and Transport, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Shevchenko Vasyl V. — Student of the Faculty of Mechanical Engineering and Transport, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

PROBLEM DISTANCE FROM POINT TO LINE AND ITS CONNECTION WITH THE THEORY OF DAMAGE SUMMATION