

# ЧУДОВІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ЛЕМНІСКАТИ БЕРНУЛЛІ

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

## Анотація

У даній роботі наведено та проаналізовано основні властивості лемніскати Бернуллі. Проведено дослідження побудови цієї кривої.

**Ключові слова:** лемніската Бернуллі, синусоїдальна спіраль, трисекція кута, рівностороння гіпербола.

## Abstract

In this paper, the basic properties of Bernoulli's lemniscata are presented and analyzed. The study of the construction of this curve is carried out.

**Keywords:** Bernoulli's lemniscata, sinusoidal spiral, trisection of the angle, equinox hyperbole.

Плоскі алгебричні лінії вищих порядків мають досить широке застосування. Серед них крива четвертого порядку – лемніската Бернуллі.

У техніці лемніската використовується, зокрема, як перехідна крива під час заокруглення малого радіуса. Наприклад, як це має місце на залізничних лініях в гірській місцевості і на трамвайних шляхах. Як приклад застосування лемніскати в галузі фізики можна вказати, що еквіпотенціальні лінії поля, які створюються двома паралельними струмами по нескінченно довгих провідниках, у площині, до них перпендикулярній, в окремому випадку є лемніскатою.

Рівняння лемніскати зустрічається вперше в математичній літературі у статті Я. Бернуллі про приливи і відливи в 1694 році. Він відзначає схожість цієї лінії із цифрою 8 і з вузловою пов'язкою, яку він називає «лемніском». Звідки і назва лемніската [1].

Як показав Бонат, лемніската є кривою, що володіє тією властивістю, що й важка матеріальна точка, виходячи зі стану спокою, пробігає під дією сили тяжіння дугу цієї кривої за такий самий час, як і відповідну хорду. Центр лемніскати при цьому збігається з вихідним положенням точки, що рухається, а вісь її утворює з вертикаллю кут  $45^\circ$  [2].

Особлива увага математиків до вивчення властивостей лемніскати була привернена у зв'язку з дослідженнями Фаньяно, який вперше виконав квадратуру лемніскати і, займаючись її випрямленням, поклав початок теорії еліптичних функцій [2].

Метою роботи є дослідження чудових властивостей лемніскати Бернуллі.

Насамперед нагадаємо, як визначається дана лінія.

Лемніската є геометричним місцем точок  $M$ , добуток відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок  $F$  і  $F_1$  є величина стала. Ця стала може виражатися будь-яким додатним числом, яке визначається квадратом половини відстані між фіксованими точками [1].

Маючи в своєму розпорядженні фіксовані точки  $F$  і  $F_1$  – фокуси лемніскати на осі абсцис і позначаючи їх абсциси через  $a$  і  $-a$ , матимемо таку рівність  $MF \cdot MF_1 = a^2$  або  $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = a^2$ , або після спрощень

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0. \quad (1)$$

Переходячи до полярних координат, отримаємо:

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi. \quad (2)$$

Лемніската складається з двох пелюсток і початок буде для неї подвійною точкою з дотичними  $y = \pm x$ . За виглядом цих рівнянь можна сказати, що дотичні в подвійній точці взаємно

перпендикулярні. З рівняння (2) випливає також, що для  $\varphi = 0$  маємо  $\rho = a\sqrt{2}$ , тобто вісь абсцис перетинається з лемніскатою в точках  $A(a\sqrt{2}, 0)$  і  $A_1(-a\sqrt{2}, 0)$  [2].

Властивості лемніскати:

1. Кут  $\mu$ , утворений дотичною в довільній точці лемніскати з радіус-вектором точки дотику дорівнює  $m\varphi + \frac{\pi}{2}$ , отже, для лемніскати він дорівнює  $2\varphi + \frac{\pi}{2}$ .

2. Кут  $\gamma$  між двома дотичними, проведеними в кінцях хорди, що проходить через полюс системи, є для кожної синусоїдальної спіралі величиною сталою, що дорівнює  $-m\pi$ , отже, для лемніскати він дорівнює  $-2\pi$ . Звідси випливає, що дотичні до лемніскати, проведені в кінцях хорди, які проходить через полюс системи, паралельні між собою.

Із рис. 1 видно, що кут, утворений перпендикуляром, опущеним на дотичну з початку координат, із полярною віссю, втричі більший полярного кута точки дотику. Отже, дана властивість лемніскати може бути використана для трисекції кута.

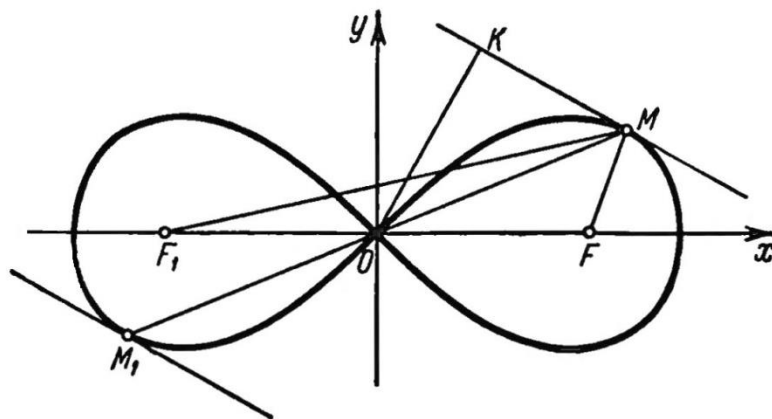


Рис. 1.

3. Радіус кривини для лемніскати знаходиться за формулою  $R = \frac{\rho}{3\cos 2\varphi}$ , і так як полярна нормаль лемніскати знаходиться за рівністю  $N = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{\rho}{\cos 2\varphi}$ , то  $R = \frac{1}{3}N$ , тобто радіус кривини лемніскати в довільній її точці втричі менший за полярну нормаль у цій точці. З цієї властивості випливає простий спосіб побудови центру кривини в довільній точці лемніскати.

Зауважимо, що геометричне місце проєкцій центрів кривини лемніскати на відповідні радіус-вектори є також лемніскатою з рівнянням  $\rho^2 = \frac{4a^2}{9}\cos 2\varphi$ .

4. Натуральне рівняння лемніскати має вигляд

$$U = 3 \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{3}{a}R\right)^4 - 1}}.$$

5. Інверсія лемніскати  $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$  дає синусоїдальну спіраль  $\rho^{-2} = 2a^2 \cos 2\varphi$ , тобто рівносторонню гіперболу.

6. Подерою синусоїдальної спіралі  $p^m = a^m \cos m\varphi$  є спіраль  $p^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}} \cos \frac{m}{m+1}\varphi$ ; отже, подерою лемніскати є синусоїдальна спіраль  $\rho^{\frac{2}{3}} = (\sqrt{2}a)^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2}{3}\varphi$ . Лемніската в свою чергу є подерою рівносторонньої гіперболи [2].

7. Лемніската є геометричним місцем точок, симетричних з центром рівносторонньої гіперболи відносно її дотичних [1].

Справді, нехай  $\rho^{-2} = a^{-2} \cos 2\varphi$  – рівняння гіперболи,  $K(x_1, y_1)$  – точка дотику,  $M(x_0, y_0)$  – точка шуканого геометричного місця, а  $N\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$  – точка перетину дотичної з прямою  $MO$  (рис. 2).

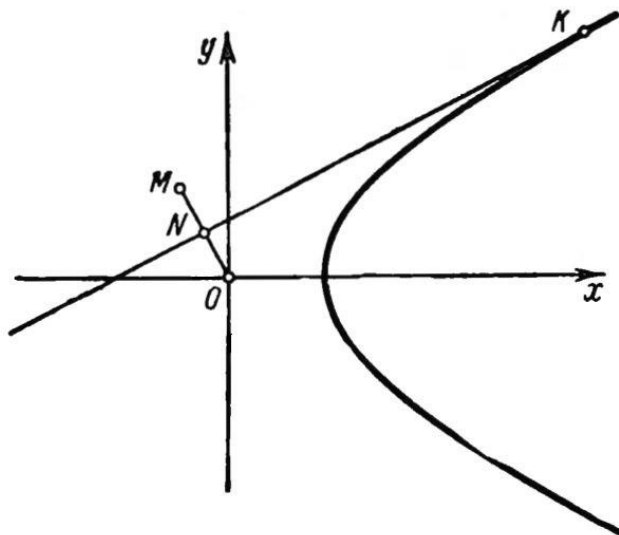


Рис. 2.

Рівняння дотичної запишеться у вигляді  $xx_1 - yy_1 = a^2$ , а рівняння прямої  $MO$  – у вигляді  $yx_1 + xy_1 = 0$ . Так як точка  $N$  лежить і на дотичній і на прямій  $MO$ , то її координати повинні задовольняти як перше, так і друге рівняння. Отже, будуть справедливі рівності  $x_0x_1 - y_0y_1 = a^2$ ,  $y_0x_1 + x_0y_1 = 0$ . Крім того,  $x_1^2 - y_1^2 = a^2$ , оскільки точка  $K$  лежить на гіперболі. Виключаючи з цих трьох рівностей параметри  $x_1$  і  $y_1$ , отримаємо рівняння  $(x_0^2 + y_0^2)^2 = a^2(x_0^2 - y_0^2)$ , що виражає лемнісату [2].

8. Відрізок бісектриси кута між фокальними радіус-векторами точки лемніскати дорівнює відрізку від центру лемніскати до перетину її осі з цією бісектрисою.

9. Низка цікавих властивостей лемніскати пов'язується з її квадратурою.

Знайдемо площу сектора між її віссю і радіус-вектором, що відповідає куту  $\varphi$ :

$$S_\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\varphi \rho^2 d\varphi = a^2 \int_0^\varphi \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi. \quad (3)$$

Для  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  отримаємо:

$$S_{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4} (a\sqrt{2})^2, \quad (4)$$

тобто площа, обмежена лемніскатою, дорівнює площі квадрата зі стороною  $a\sqrt{2}$ .

На підставі елементарних міркувань можна показати, що перпендикуляр, опущений з фокуса лемніскати на радіус-вектор будь-якої її точки, ділить площу відповідного сектора навпіл.

Цікаву властивість лемніскати було виявлено Штейнером в 1835 році. Нехай точки  $F'_1$  і  $F'_2$  є точками, гармонійно спряженими з точками  $F_1$  і  $F_2$  відносно точок  $A_1$  і  $A_2$  (рис. 3).



$AB = a\sqrt{2}$ ; опишемо коло з центром у початку координат; під довільним кутом  $\varphi$  (але меншим  $\frac{\pi}{4}$ ) проводимо пряму  $N_1ON$ ; із точки  $N$  опускаємо на вісь абсцис перпендикуляр  $ND$ ; із точки  $A$  радіусом, що дорівнює  $OD$ , засікаємо на  $OB$  точку  $C$  (рис. 4).

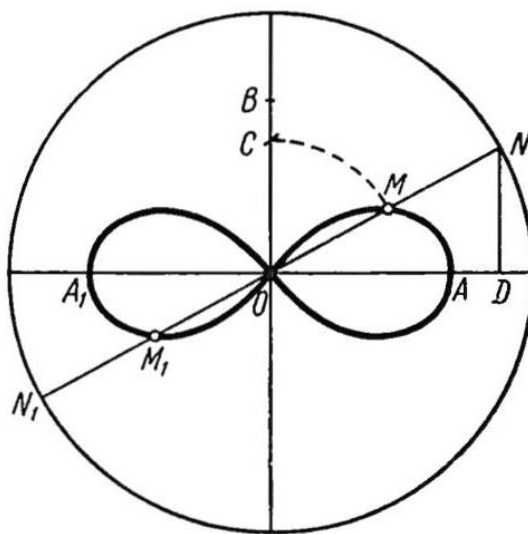


Рис. 4.

Тоді  $OC^2 = AC^2 - OA^2 = OD^2 - OA^2 = (ON \cos \varphi)^2 - OA^2 = (a\sqrt{2} \cos \varphi)^2 - a^2$ , звідси випливає, що катет  $OC$  буде визначати довжину радіус-вектора точки лемніскати, яка відповідає куту  $\varphi$ . Тепер залишається радіусом, що дорівнює  $OC$ , зробити засічки на прямій  $N_1ON$  в точках  $M_1$  і  $M_2$ . Ці точки будуть належати лемніскаці. Повернувши пряму  $N_1ON$  на деякий кут і повторивши вказану побудову, отримаємо другу пару точок кривої і так далі [2].

Таким чином, лемніската Бернуллі завдяки своїм чудовим властивостям має широке застосування в математиці і фізиці. Заслужують на увагу її властивості, пов'язані з дотичними, радіусом і центром кривини, інверсією, подорою, квадратурою, площею, довжиною дуги тощо.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: Наука, 1964. – 872 с.
2. Савелов А. А. Плоские кривые: систематика, свойства, применения / А. А. Савелов. – Москва: Наука, 1960. – 296 с.

**Тютюн Любов Андріївна** – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, e-mail: tyutyun\_lyubov@i.ua

**Тимчишена Ірина Андріївна** – студентка групи 4-АМ, факультету математики, фізики і технологій, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, e-mail: [tymchyshena@gmail.com](mailto:tymchyshena@gmail.com)

**Tiutun Liubov A.** – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of Mathematics and Computer Science Department, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, e-mail: tyutyun\_lyubov@i.ua

**Tymchyshena Irina A.** – Department of Mathematics, Physics and Technology, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, e-mail: [tymchyshena@gmail.com](mailto:tymchyshena@gmail.com)