УДК 004.94 + 004.45

О. М. Нікітенко

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МЕТЕМАТИКИ MAPLE У ПРИРОДНИЧИХ НАУКАХ

Харківський національний університет радіоелектроніки

Анотація
Наведено порівняння систем комп'ютерної математики. Описано процес розв'язання задачі математичної фізики за допомогою СКМ Maple та створення анімаційних зображень в форматі pdf за допомогою системи LaTeX.
Ключові слова: СКМ, Maple, анімаційне зображення, формат pdf, LaTeX

Abstract
Comparison of computer mathematic systems was given. Process of mathematical physics problem using CMS Maple and design of animation images in pdf-format using LaTeX system was described.
Keywords: CMS, Maple, animation image, pdf-format, LaTeX

Вступ

Ми стали свідками докорінних змін у науці. Ще ніколи наукові досягнення не створювали такого впливу на економіку, світогляд, спосіб життя. Наука стала однією з небагатьох галузей, де економічний ефект у кілька разів перевищує вкладені кошти. Витрати на наукові дослідження у бюджетах розвинених країн вже перевищують десятки мільярдів доларів.

Наразі не тільки в науці, але й у багатьох галузях техніки „період напіврозпаду знань" (той час, за який має оновитися половина знань, які є необхідними для успішної роботи) не перевищує 3 – 5 років.

Широке проникнення інформаційних технологій в усі галузі людської діяльності висуває підвищені вимоги щодо комп'ютерної підготовки фахівців у вищих навчальних закладах.

Математичне моделювання фізичних процесів та явищ є однією з можливостей отримання нових наукових, технічних та технологічних знань. Одним з найдосконаліших та найефективніших засобів моделювання є моделювання за допомогою сучасних комп'ютерів. Для використання такого моделювання фахівець повинен володіти засобами та навичками реалізації математичних моделей з використанням сучасних комп'ютерів [1, 2].

Для полегшення рутинних математичних викладок та прискорення часу виконання проектів використовують системи комп'ютерної математики.

Тому метою цієї роботи є застосування інструментів системи комп'ютерної математики Maple для розв'язання задач математичної фізики та інструментів вдавничої системи LaTeX для створення звітів про виконану роботу.

Вибір системи комп'ютерної маткматики

Інтенсивність наукових досліджень, що різко зросла, вимагає значного скорочення часу на виконання рутинної роботи, в тому на числі різноманітні обчислення та викладки.

Що до простих обчислень, то тут можуть допомогти програмні калькулятори, щось на кшталт електронних таблиць Excel.

Скороченню часу, що потрібен на різноманітні математичні викладки, можуть зарадити системи комп'ютерної математики (СКМ).

Системи комп'ютерної математики призначені для різного класу споживачів і їх поділяють на прості, середнього та високого рівнів.

До простих і відносно нескладних СКМ відносяться системи типу Derive.

До середнього рівня таких систем відноситься MathCad. Ця система має розвинену систему числових обчислень та дещо обмежену систему символьних перетворень. Символьні перетворення в цій системі здійснюються за допомогою ядра Maple. Крім того, графічні можливості різних релізів MathCad мало відрізняються від графічних можливостей більш складних СКМ.

Ядро системи Maple також використовується й в іншій системі комп'ютерної математики високого рівня — Matlab. Ця система є добре адаптованою та надійною СКМ і розрахована на розв'язання широкого кола задач, особливо щодо числових обчислень. До її недоліків відноситься громіздкість та вимогливість до ресурсів комп'ютера.

Кардинальним чином відрізняються системи вищого класу Maple та Matematica, які дозволяють здійснювати символьні або аналітичні операції.

СКМ вищого класу мають приблизно однакові можливості як символьних, так і числових обчислень.

Порівняння розповсюдженості цих систем показало, що розповсюдженість СКМ Maple в 6 — 7 разів більша за СКМ Matematica [3].

Порівняльна оцінка СКМ Maple та Matematica щодо їх використання [4] показала, що СКМ Matematica під час експлуатації має суттєво більше проблем різноманітного характеру.

Отже, для роботи варто вибрати СКМ Maple, яка дозволяє здійснювати обчислення як аналітичні, так і чисельні. Крім цього в цій системі комп'ютерної математики закладено створення анімаційних маюнків файлів, які можна у імпортувати формат gif. Отримані результати обчислень можна імпортувати у файли форматів:

rtf, який є базовим для всіх версій текстового процесора MS Word;

html, який є базовим для розміщення документів в Internet;

tex — формат файлу видавничої системи LaTeX, що призначена для створення математичних текстів і яка є єдиним форматом для більшості світових наукових видань [5] і дозволяє створювати вихідний файл у форматі pdf.

PDF (Portable Document Format) — відкритий платформенно-незалежний формат для опису електронних документів було створено фірмою Adobe Systems у 1993 році. В 2006 році було опубліковано версію стандарту під номером 1.7. Файл в PDF-форматі може бути комбінацією векторної графіки, тексту й растрових зображень (світлини, знімки екрану, анімаційна графіка тощо). У стандарті PDF передбачено можливість створення гіперпосилань, форм та інтерактивних вставок на JavaScript. Починаючи з версії 1.6 декларується можливість опису 3D інтерактивних документів.

З точки зору формату для подання презентації PDF задовольняє необхідним умовам, таким як:

- Простота створення.
- Мобільність.
- Інтерактивність.

PDF вже став «негласним» стандартом, тому бажано в цьому форматі й створювати електронні видання. До недавнього часу недоліком цього формату була неможливість розташування в таких файлах анімаційних зображень.

Перевагами цього формату є можливість сумісного використання різних форм зображення інформації (текстової, аудіовізуальної, графічної тощо) в одному PDF-файлі локально без необхідності підключення до мережі Internet, можливість розташування готового продукту на сайті навчального закладу, автора, бібліотеки тощо без необхідності конвертування його в HTML, підтримка вкладень у вигляді документів різних форматів, можливість коментування в тексті з підтримкою наступного обговорення, зручна система навігації по файлу завдяки системі закладок, можливість встановлення різноманітних видів захисту, включаючи встановлення пароля на відкриття і/або редагування, адаптованість під широкий діапазон пристроїв, операційних систем та браузерів, незалежність від наявності доступу до мережі Internet. Крім того, створений у форматі PDF мультимедійний файл (підручник) можна видати як електронний підручник у відповідності до положення про електронні ресурси № 1060 від 01.10.2012 р. [6] та державного стандарту ДСТУ 7157:2010 «Інформація та документація. Видання електронні. Основні види та вихідні відомості» [7].

Таким чином, цей формат можна використовувати як для створення самостійного мультимедійного видання, так і для створення електронного аналога друкованого видання [8].

Розв'язання задачі математичної фізики за допомогою СКМ Maple

Розглянемо відому задачу про розповсюдження вільних коливань у обмеженому просторі.

Задача Нехай в обмеженому просторі $0 \leq x \leq l$ розповсюджуються вільні коливання, які описуються гіперболічним рівнянням $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ t > 0$. Розповсюдження цих хвиль підпорядковано таким початковим умовам $u(x,0) = \varphi(x) = 0$ та однорідним крайовим умовам $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

Аналітичний розв'язок цього рівняння, що описує процес формування стоячих хвиль в обмеженому просторі, є відомим і має вигляд

$$u(x,t) = \frac{2l^2}{\pi^3 a} \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l} t\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{l} x\right) \qquad (1)$$

Розглянемо як за допомогою системи комп'ютерної математики Maple розв'язати таку задачу

\> restart;

Підключимо пакете лінійної алгебри та сформуємо диференціальне рівняння коливань, що розвиваються в обмеженому просторі координат

\> with(LinearAlgebra):

\> eq:=diff(u(x,t),t2)/$a^2 - diff(u(x,t),x2)$=0;

$$eq := \frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)}{a^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\right) = 0$$

Задамо у загальному вигляді початкову умову

\> initc:= u(x,0)=0, D[2](u(x,0)) = psi(x);

$$initc := u(x,0) = 0,\ D_2(u(x,0)) = \psi(x)$$

\> psi(x) = x

$$\psi(x) = x$$

Задамо крайові умови

\> boundc: = u(0,t) = 0, u(l,t) = 0;

$$boundc := u(0,t) = 0, u(l,t) = 0;$$

Здійснимо відокремлення змінних

\> subs(u(x,t)=X(x)*T(t),eq);

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}(t)\right)}{a^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}(t)\right)\right) = 0$$

> expand(lhs(%)/X(x)/T(t))=0

$$\frac{\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{T}(t)}{\mathrm{T}(t)\,v^2} - \frac{\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{X}(x)}{\mathrm{X}(x)} = 0$$

Сформуємо два звичайних диференціальних рівняння з відокремленими змінними відносно просторової та часової координат

> s1:=op(1,lhs(%)) = $-\lambda$;
s2:=op(2,lhs(%%))=λ;

$$s1 := \frac{\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{T}(t)}{\mathrm{T}(t)\,v^2} = -\lambda$$

$$s2 := -\frac{\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{X}(x)}{\mathrm{X}(x)} = \lambda$$

Для рівняння, що має просторову залежність, виділяємо задачу Штурма-Ліувілля й розв'язуємо його за заданих крайових умовах

> assume($\lambda > 0$):
dsolve(s2,X(x));

$$\mathrm{X}(x) = \_C1\,\sin(\sqrt{\lambda\tilde{}}\,x) + \_C2\,\cos(\sqrt{\lambda\tilde{}}\,x)$$

> X:=unapply(rhs(%),x);

$$X := x \to \_C1\,\sin(\sqrt{\lambda\tilde{}}\,x) + \_C2\,\cos(\sqrt{\lambda\tilde{}}\,x)$$

Формуємо систему рівнянь із заданих крайових умов

> e1:=X(0)=0;
e2:=X(l)=0;
sist:=e1,e2;

$$e1 := \_C2 = 0$$
$$e2 := \_C1\,\sin(\sqrt{\lambda\tilde{}}\,l) + \_C2\,\cos(\sqrt{\lambda\tilde{}}\,l) = 0$$
$$sist := \{\_C2 = 0,\ \_C1\,\sin(\sqrt{\lambda\tilde{}}\,l) + \_C2\,\cos(\sqrt{\lambda\tilde{}}\,l) = 0\}$$

Розрахуємо визначник цієї системи

> A:=GenerateMatrix(sist,_C1,_C2):
A[1];

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\sqrt{\lambda\tilde{}}\,l) & \cos(\sqrt{\lambda\tilde{}}\,l) \end{bmatrix}$$

> Delta:=Determinant(A[1]);

$$\Delta := -\sin(\sqrt{\lambda\tilde{}}\,l)$$

З умови рівності нулю визначника знаходимо власні значення крайової задачі

> _EnvAllSolutions := true:
solve(Delta,lambda);

$$\frac{\pi^2\,\_Z1\tilde{}^2}{l^2}$$

Присвоюємо невизначеним коефіцієнтам сталі цілі значення

> subs(_Z1='k',%): ev:=unapply(%,k);

$$ev := k \to \frac{\pi^2\,k^2}{l^2}$$

Підставимо знайдені власні числа у рівняння, яке залежить від просторової координати

> assume(k,posint); > X:='X';
subs(lambda=ev(k),s2);

$$X := X$$

$$-\frac{\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{X}(x)}{\mathrm{X}(x)} = \frac{\pi^2\,k\tilde{}^2}{l^2}$$

Визначаємо власні функції задачі із заданих граничних умов

> dsolve(%,X(0) =0,X(l)=0,X(x));

$$\mathrm{X}(x) = \_C1\,\sin(\frac{\pi\,k\tilde{}\,x}{l})$$

Нормуємо ці функції, використовуючи визначення "норми"базисних функцій

> rhs(%)/sqrt(int(rhs(%)^2,x=0..l));

$$\frac{\_C1\,\sin(\frac{\pi\,k\tilde{}\,x}{l})\,\sqrt{2}}{\sqrt{l\,\_C1^2}}$$

Власні значення й власні функції знайдені, останні подано у вигляді ортонормованого базису

> simplify(%,radical,symbolic):
ef:=unapply(%,(k,x));

$$ef := (k\tilde{},\,x) \to \frac{\sin(\frac{\pi\,k\tilde{}\,x}{l})\,\sqrt{2}}{\sqrt{l}}$$

> ev(k);
ef(k,x);

$$\frac{\pi^2\,k\tilde{}^2}{l^2}$$

$$\frac{\sin(\frac{\pi\,k\tilde{}\,x}{l})\,\sqrt{2}}{\sqrt{l}}$$

Знайдемо тепер розв'язок другого диференціального рівняння з урахуванням однієї з початкових умов

> s1:=lhs(s1)=-ev(k);

$$s1 := \frac{\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{T}(t)}{\mathrm{T}(t)\,v^2} = -\frac{\pi^2\,k\tilde{}^2}{l^2}$$

> dsolve(s1,T(0) =0,T(t));

$$\mathrm{T}(t) = \_C1\,\sin(\frac{\pi\,k\tilde{}\,v\,t}{l})$$

Розв'язок початкової задачі формуємо у вигляді нескінченного ряду

> spr:=Sum(C(k)*op(2,rhs(%))*ef(k,x),k=1..infinity);

$$spr := \sum_{k\tilde{}=1}^{\infty} \frac{\mathrm{C}(k\tilde{})\,\sin(\frac{\pi\,k\tilde{}\,v\,t}{l})\,\sin(\frac{\pi\,k\tilde{}\,x}{l})\,\sqrt{2}}{\sqrt{l}}$$

Визначаємо з другої початкової умови (для похідної за часом від шуканої функції) коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є

> value(subs(t=0,diff(spr,t)))=ψ;

$$\sum_{k\tilde{}=1}^{\infty} \frac{\mathrm{C}(k\tilde{})\cos(0)\,\pi\,k\tilde{}\,v\sin(\frac{\pi\,k\tilde{}\,x}{l})\,\sqrt{2}}{l^{(3/2)}} = \psi$$

> Ck:=Int(ef(k,x),x=0..l)/ev(k)^1/2/a;
Ck:=value(Ck);

$$Ck := \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{\pi^2\,k\tilde{}^2\,v}\int_0^l \frac{\sin(\frac{\pi\,k\tilde{}\,x}{l})\,\sqrt{2}}{\sqrt{l}}\,dx\right)$$

$$Ck := \frac{1}{2}\frac{\left(\begin{cases} \frac{-I\sqrt{2}((-1)^{k\tilde{}}-1)\sqrt{-l}}{\pi k\tilde{}} & l \le 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{l}((-1)^{k\tilde{}}-1)}{\pi k\tilde{}} & 0 < l \end{cases}\right) l^2}{\pi^2 k\tilde{}^2 a}$$

> Ck:=simplify(value(Ck));

$$Ck := \begin{cases} \dfrac{\frac{-1}{2}\,I\,\sqrt{2}\,((-1)^{k\tilde{}}-1)\,(-l)^{(5/2)}}{\pi^3\,k\tilde{}^3\,a} & l \ge 0 \\ -\dfrac{l^{(5/2)}\,\sqrt{2}\,((-1)^{k\tilde{}}-1)}{2\,\pi^3\,k\tilde{}^3\,a} & 0 < l \end{cases}$$

> C:=unapply(Ck,k);

$$C := k\tilde{} \to \mathrm{piecewise}\left(l \le 0,\ \frac{\frac{-1}{2}\,I\,\sqrt{2}\,((-1)^{k\tilde{}}-1)\,(-l)^{(5/2)}}{\pi^3\,k\tilde{}^3\,v},\ 0 < l,\ -\frac{1}{2}\,\frac{l^{(5/2)}\,\sqrt{2}\,((-1)^{k\tilde{}}-1)}{\pi^3\,k\tilde{}^3\,v}\right)$$

Отримаємо формальний розв'язок поставленої задачі у вигляді нескінченного ряду.

> sol:=spr;

$$sol := \sum_{k\tilde{}=1}^{\infty} \frac{\left(\begin{cases} \dfrac{\frac{-1}{2}\,I\,\sqrt{2}\,((-1)^{k\tilde{}}-1)\,(-l)^{(5/2)}}{\pi^3\,k\tilde{}^3\,a} & l \ge 0 \\ -\dfrac{l^{(5/2)}\,\sqrt{2}\,((-1)^{k\tilde{}}-1)}{2\,\pi^3\,k\tilde{}^3\,a} & 0 < l \end{cases}\right)\sin(\frac{\pi\,k\tilde{}\,at}{l})\sin(\frac{\pi\,k\tilde{}\,x}{l})\,\sqrt{2}}{\sqrt{l}}$$

Здійснимо деякі тривіальні перетворення для отримання остаточного розв'язку

> subs(k=2*m+1,op(1,sol)):
assume(m,integer):
> simplify(%):
factor(%);

$$\frac{2\sin\left(\frac{\pi\,(2\,m\tilde{}+1)\,a\,t}{l}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,(2\,m\tilde{}+1)\,x}{l}\right)\,l^2}{\pi^3\,(2\,m\tilde{}+1)^3\,a}$$

> u(x,t)=Sum(%,m=0..infinity):

Остаточний розв'язок задачі це нескінченний набір гармонік з частотами $\omega_m = \dfrac{(2m+1)\pi \cdot a}{l}$ у вигляді стоячих хвиль на відрізку $[0, l]$.
> solution:=Sum(%,m=0..infinity);

$$solution := \sum_{m\tilde{}=0}^{\infty} \left(\frac{2\sin(\frac{\pi\,(2\,m\tilde{}+1)\,a\,t}{l})\sin(\frac{\pi\,(2\,m\tilde{}+1)\,x}{l})\,l^2}{\pi^3\,(2\,m\tilde{}+1)^3\,a} \right)$$

Таким чином бачимо, що отриманий розв'язок повністю збігається з розв'язком (1).

Для кращого сприйняття отриманого розв'язку будують його графічну залежність у вигляді анімаційного зображення (рис. 1).
> animate(plot,[{u(t,x)},x=0..1], t=0..1, frames=150,thickness=3);

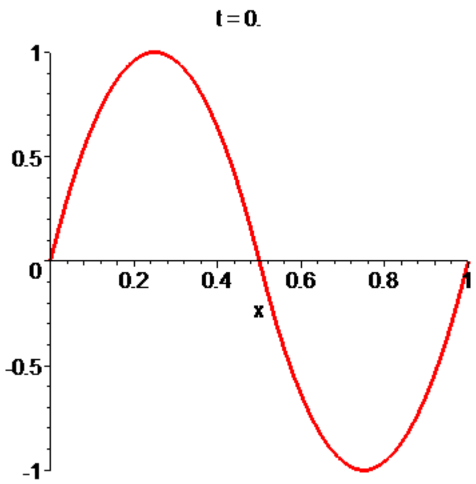

Рис. 1 — Формування стоячих хвиль в обмеженому просторі

Фахівці за допомогою досліджень підтвердили, що анімація сприяє підвищенню ефективності навчального та наукового процесів.

Лекції, лабораторні роботи, модулі, тестові завдання, результати досліджень за допомогою анімації стають більш зрозумілими й доступними кожному студенту і науковцю.

За допомогою СКМ Maple можна побудувати анімаційні файли для пояснення явищ, які вивчають чи досліджують у природничих науках.

Будь-яке наукове дослідження потребує завершальної стадії: оформлення результатів дослідження чи то у вигляді звіту, статті, доповідей на конференції. Тут нам стане у пригоді видавнича система LaTeX.

Переваги LaTeX'у: безкоштовність, естетичний вигляд, pdf-файл, дефакто є стандартом наукових і не тільки публікацій. Можливість створювати анімаційні рисунки, можливість конвертування безпосередньо з СВМ Maple в LaTeX.

Нещодавно з'явився пакет animate, який дозволяє «побачити» багато математичних конструкцій, які традиційно є складними для розуміння. «Ожививши» деякі геометричні побудови, можна отримати більш повне уявлення про ті чи інші аспекти теорії, ніж від «мертвого» рисунку [9].

Пакет "animate" в LaTeX використовується для створення pdf-файлів з анімаційним вмістом графічних об'єктів, таких як LaTeX-картинки, PSTricks-картинки або PDF/TikZ-картинки. На відміну від стандартних відеофайлів пакет "animate" створює анімацію векторної графіки.

Пакет "animate" підтримує процес створення pdf-файлів. Результуючий pdf-файл можна переглянути у програмі **Adobe Reader** [5].

Рисунок 1 в цій роботі є анімаційним, а сама робота підготовлена за допомогою системи LaTeX.

Висновки

Для підготовки наукової роботи та успішного використання часу на рутинні операції (аналітичні обчислення) варто використовувати СКМ, краще Maple, а для оформлення результатів дослідної роботи використовувати Latex тим більше, що не частина візуалізації, автору залишається створити тільки текстову частину, а розташування бере на себе Latex, особливо гарто виходить з математичними формулами та презентацією.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. C++: Решение инженерных задач [Текст] : Учебное пособие / А. В. Луговой, Е. П. Путятин, Д. М. Смагин, В. П. Степанов. – Харьков : «Компания СМИТ», 2005. – 349 с.

2. Нікітенко О. М. Maple: Розв'язання інженерних та наукових задач [Текст] : Навч. посібник / О. М. Нікітенко – Харків: ХНУРЕ, 2011. – 289 с.

3. Гречко А. Л. Сучасний стан програмного забезпечення в курсах якісної теорії диференціальних рівнянь та динамічних систем [Текст] / А. Л. Гречко // Друга міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті» 20 – 21 грудня 2013 Київ С. 296 – 298

4. Аладьев В. З. Системы компьютерной алгебры: Maple: Искусство программирования [Текст] / В. З. Аладьев – Таллинн : Лаборатория базовых знаний, 2006. – 792 с.

5. Губаль Г. М. Анімація в математичних текстах на мові Latex / Г. М. Губаль // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво, вип. 11, 2013, Луцьк, С. 11 – 15

6. Положення про електронні освітні ресурси : затверджене наказом Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України №1060 від 01.10.2012 р. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://zakon1.rada.gov.ua/laws/show/z1695-12.

7. ДСТУ 7157:2010. Інформація та документація. Видання електронні. Основні види та вихідні відомості. – Чинний від 2010–07–01. – К. : Держспоживстандарт України, 2010. – 13 с.

8. Варенко Т.К. Мультимедийный учебник: определение и форматы реализации / Т.К. Варенко // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Іноземна філологія. - 2015. - Вип. 82. Харків, С. 29 – 34

9. Волченко Ю.М. Современная лекция – комплексный подход / Ю.М. Волченко // Друга міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті» 20 – 21 грудня 2013 Київ С. 293 – 295

Олександр Миколайович Нікітенко — канд. техн. наук, доцент кафедри метрології та технічної експертизи, Харківський національний університет радіоелектроніки

Oleksandr M. Nikitenko — Cand. Sc. (Eng), Assistant Professor of Metrology and Technical Expertise, Kharkiv National University of Radioelectronics