УДК 517.5

О. В. Кравчук

Лінійні методи, що задаються прямокутними матрицями

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

Анотація

Розглянуто лінійні Λ – методи підсумовування рядів Фур'є, що задаються прямокутними матрицями та їх апроксимативні властивості.

Ключові слова: ряд Фур'є, регулярний метод сумування, прямокутна матриця.

Abstract

We considered linear Λ – methods of summation of Fourier series given by rectangular matrices and their approximative properties.

Keywords: Fourier series, a regular method of summation, a rectangular matrix.

Розглянемо матриці Λ з довільними елементами $\lambda_k^{(n)}$, $n = 0,1,\ldots$, $k = 0,1,\ldots$. Кожній функції $f \in L$ з рядом Фур'є $S[f]$ співставимо послідовність рядів

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0\lambda_1^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), n = 0,1,\ldots, \tag{1}$$

які можуть бути не тільки тригонометричними поліномами, а навіть і рядами Фур'є деяких функцій.

Виникає питання: якщо $f \in C$, то яким умовам повинні задовольняти елементи $\lambda_k^{(n)}$, щоб ряди (1) $\forall n \in N$ рівномірно збігалися і при цьому $\forall f \in C$

$$\lim_{n\to\infty} \| f(x) - U_n(f;x;\Lambda) \|_C = 0.$$

В цьому випадку метод сумування $U_n(\Lambda)$, що визначається даною матрицею Λ, називають регулярним в просторі C або просто регулярним.

Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 1. Для того, щоб метод сумування $U_n(\Lambda)$ був регулярним в просторі C, необхідно і достатньо, щоб

1) для всіх $k = 0,1,2,\ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1;$$

2) кожна з функцій

$$K_n^{(m)}(t) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(n)} \cos kt, n = 0,1,\ldots, m \in N$$

задовольняла умову

$$\int_0^{\pi} \left| K_n^{(m)}(t) \right| dt \le M_n, n = 0,1,\ldots,$$

де M_n — стала, що незалежна від m;

3) повна варіація функції

$$\tilde{K}_n(x) = \lim_{m\to\infty} \int_0^{\pi} K_n^{(m)}(t)dt = \frac{x\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\lambda_k^{(n)} \sin kx$$

була рівномірно обмеженою на відрізку $[0,\pi]$:

$$\overset{\pi}{\underset{0}{V}} \tilde{K}_n = \int_0^{\pi} | d\tilde{K}_n(t) | \, dt \le C.$$

Доведення цієї теореми базується на наступному відомому твердженні з функціонального аналізу:

Теорема 2. Для того, щоб послідовність F_m лінійних функціоналів збігалася в кожній точці f банахового простору E до функціоналу F_0, необхідно і достатньо, щоб

1) норми функціоналів $\| F_m \|$ були обмежені:

$$\| F_m \| \le C;$$

2) якщо M — множина функцій φ_i, $i = 0,1,\ldots$, лінійні комбінації яких всюди щільні в E, то $\forall \varphi_i \in M$

$$\lim_{m\to\infty} F_m(\varphi_i) = F_0(\varphi_i),\ i = 0,1,2,\ldots.$$

крім того, якщо $f(v)$ неперервна на $(a+\alpha, b+\beta)$, $0 \le \alpha \le \beta$ і $f_x(t) = f(x+t)$, то рівномірно по $t \in (\alpha, \beta)$

$$\lim_{m\to\infty} F_m(f_x) = F_0(f_x).$$

Теорема 3. Для того, щоб метод $U_n(\Lambda)$ був регулярним в просторі C, достатньо, щоб елементи $\lambda_k^{(n)}$ матриці Λ задовольняли умови

1) для всіх $k = 0,1,2,\ldots$

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1$$

і при фіксованому n

$$\lambda_k^{(n)} = O(1/\ln k), k \to \infty;$$

2) для кожного n можна вказати число m (фіксоване, або таке, що прямує до нескінченності разом з n) таке, що

$$\sum_{\substack{k=0\\k\ne m}}^{\infty} \frac{m+k}{m} |m-k| \ln \frac{m+k}{|m-k|} \Delta^2 \lambda_k^{(n)} \le C,$$

де

$$\Delta^2 \lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)}$$

і C — стала, що не залежить від n.

Відмітимо, що апроксимативні властивості лінійних Λ – методів підсумовування рядів Фур'є, що задаються прямокутними матрицями, вивчались, наприклад, в роботах [1]–[5].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Жигалло К.М., Харкевич Ю.І. Наближення спряжених диференційовних функцій бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. — 2009. — 61, № 3. — 333-345 с.
2. Kalchuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W_\beta^r H^\alpha$ // Ukrainian Math. J. — 2017. — 68, № 11. — 1727-1740 p.
3. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β) – differentiable functions by Weierstrass integrals // Ukrainian Math. J. — 2007. — 59, № 7. — 1059–1087 p.
4. Kalchuk I.V. Approximation of (ψ, β) – differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators // Ukrainian Math. J. — 2007. — 59, № 9. — 1342–1363 p.
5. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals // Ukrainian Math. J. — 2009. — 61, № 1. — 86-98 p.

Кравчук Олена Володимирівна **—** студентка факультету інформаційних систем, фізики та математики, Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, e-mail: kravchukelena97@gmail.com

Науковий керівник: ***Кальчук Інна Володимирівна*** — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри і математичного аналізу, Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

Kravchuk Olena V. — Department of Information Systems, Physics and Mathematics, Lesya Ukrainka Eastern European National University, Lutsk, e-mail: kravchukelena97@gmail.com

Supervisor: ***Kalchuk Inna V.*** — Candidate of Physico–Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Information Systems, Physics and Mathematics, Lesya Ukrainka Eastern European National University, Lutsk