

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДЛЯ ПОБУДОВИ ВАРІАЦІЇ ФУНКЦІЙ, ОДНОЛИСТИХ У БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ

ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»

Анотація

За допомогою квазіконформних автоморфізмів розширеної комплексної площини побудовано спільну варіацію однолистої в багатозв'язній круговій області функції та її області визначення.

Ключові слова: автоморфізм, однолистий, квазіконформний, варіація, багатозв'язна область.

Summary

Using a quasi-conformal automorphisms of an extended complex plane, a common variation of a function defined in a multiply connected circular domain and its definition domain is constructed.

Keywords: automorphism, univariate, quasi-conformal, variation, multiply connected domain.

Позначимо через $L_\infty(D)$ простір вимірних на $D \subset \mathbb{C}$ функцій $\mu(z)$ з нормою

$$\|\mu\|_\infty = \operatorname{esssup}_{z \in D} |\mu(z)|.$$

Визначення. Квазіконформним відображенням області D називається гомеоморфний узагальнений розв'язок $w = f(z)$ рівняння Бельтрамі

$$w_{\bar{z}} = \mu w_z, \mu \in L_\infty(D), \|\mu\|_\infty < 1 \quad (1)$$

що зберігає орієнтацію.

Функція μ називається комплексною характеристикою відображення.

Має місце наступна

Теорема 1. Для кожної вимірної комплексної характеристики μ в області D , $\|\mu\|_\infty < 1$, існує квазіконформне відображення $f^\mu : D \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. Кожне інше квазіконформне відображення с тою ж характеристикою має вигляд $\varphi \circ f^\mu$, де φ - конформне в $f^\mu(D)$ відображення.

Якщо L_∞ -норма комплексної характеристики μ мала, то стає можливим записати формулу для квазіконформного автоморфізма $\bar{\mathbb{C}}$ з характеристикою μ .

Теорема 2. Нехай $R_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\mu(z, \varepsilon) = \varepsilon a(z) + \varepsilon \alpha(z, \varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, причому $\|a\|_\infty < \infty$, $\|\alpha(\cdot, \varepsilon)\|_\infty \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Тоді квазіконформний автоморфізм $\tilde{\omega} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, такий, що

$$\mu^{\tilde{\omega}}(z) = \mu(z, \varepsilon)$$

$$\tilde{\omega}(0) = 0, \tilde{\omega}(\infty) = \infty, \tilde{\omega}(R_0) = R_0$$

може бути представлений формулою

$$\tilde{\omega}(z) = z - \frac{\varepsilon z(z - R_0)}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{a(\zeta)}{\zeta(\zeta - R_0)(\zeta - z)} dm_\zeta + o(\varepsilon). \quad (2)$$

Наступна теорема уточнює теорему 2 у випадку симетрії комплексної характеристики $\mu = \mu(z, \varepsilon)$

Теорема 3. Нехай $\mu(z, \varepsilon) = \varepsilon a(z) + \varepsilon \alpha(z, \varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, причому $\|a\|_\infty < \infty$, $\|\alpha(\cdot, \varepsilon)\|_\infty \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Тоді існує $\omega(z, \varepsilon)$ - квазіконформний автоморфізм розширеної комплексної площини $\bar{\mathbb{C}}$ з комплексною характеристикою $\mu(z, \varepsilon)$, такий, що $\omega(0, \varepsilon) = 0$, $\omega(\infty, \varepsilon) = \infty$, представлений у вигляді

$$\omega(z, \varepsilon) = z - \frac{\varepsilon z}{\pi} \iint_{|\zeta| \leq R} \frac{a(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} dm_\zeta - \frac{\varepsilon z^2}{\pi} \iint_{|\zeta| \geq R} \frac{a(\zeta)}{\zeta^2(\zeta - z)} dm_\zeta - i\varepsilon\gamma z + o(\varepsilon), \quad (3)$$

де $R > 0$, а γ - дійсна константа.

Якщо додатково

$$\mu(z, \varepsilon) = \frac{z^2}{\bar{z}^2} \overline{\mu\left(\frac{R^2}{\bar{z}}, \varepsilon\right)}, \quad (4)$$

то при $|z| = R$

$$|\omega(z, \varepsilon)| = R + o(\varepsilon)$$

Доведення. Виберемо деяке $R_0 : 0 < R_0 < R$. Будь-яке квазіконформне відображення $\omega(z)$, що задовольняє всім умовам теореми 1, окрім $\omega(R_0) = R_0$, може бути представлене у вигляді $\omega(z) = A\tilde{\omega}(z)$, де A - довільна комплексна константа.

Виберемо

$$A = 1 - \frac{\varepsilon}{\pi} \iint_{|\zeta| \leq R} \frac{a(\zeta)}{\zeta(\zeta - R_0)} dm_\zeta - \frac{\varepsilon R_0}{\pi} \iint_{|\zeta| \geq R} \frac{a(\zeta)}{\zeta^2(\zeta - R_0)} dm_\zeta - i\varepsilon\gamma.$$

Нехай $\omega_1(z)$ - квазіконформний автоморфізм $\bar{\mathbb{C}}$ з комплексною характеристикою

$$\mu_1(z) = \begin{cases} \varepsilon a(z), & |z| \leq R \\ 0, & |z| > R \end{cases} \bar{\varepsilon}$$

такий, що $\omega_1(0) = 0, \omega_1(\infty) = \infty, \omega_1'(\infty) = 1$. Тоді $\omega_1(z)$ може бути представлений у вигляді

$$\omega_1(z) = z - \frac{\varepsilon z}{\pi} \iint_{|\zeta| \leq R} \frac{a(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} dm_\zeta + o(\varepsilon),$$

$$|A| \leq \frac{1}{R} |\omega_1(z)| + \frac{\varepsilon R_0}{\pi} \left| \iint_{|\zeta| \geq R} \frac{a(\zeta)}{\zeta^2(\zeta - R_0)} dm_\zeta \right| + o(\varepsilon) < \infty.$$

Підставляючи вибране A в формулу $\omega(z) = A\tilde{\omega}(z)$, отримаємо представлення (3).

Нехай тепер виконане (4). Обчислимо $|\omega(z, \varepsilon)|$ при $|z| = R$:

$$|\omega(z, \varepsilon)| = |z| \left| 1 - \frac{\varepsilon}{\pi} \operatorname{Re} \left(\iint_{|\zeta| \leq R} \frac{a(\zeta) dm_\zeta}{\zeta(\zeta - z)} + \iint_{|\zeta| \geq R} \frac{za(\zeta) dm_\zeta}{\zeta^2(\zeta - z)} \right) \right| + o(\varepsilon).$$

У другому інтегралі зробимо заміну змінної $\zeta \mapsto \frac{R^2}{\bar{\zeta}}$. Оскільки на колі $|z| = R$ $z = \frac{R^2}{\bar{z}}$, отримаємо

$$|\omega(z, \varepsilon)| = R \left| 1 - \frac{\varepsilon}{\pi} \operatorname{Re} \left(\iint_{|\zeta| \leq R} \left(\frac{a(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} - \frac{\overline{a(\zeta)}}{\bar{\zeta}(\bar{\zeta} - \bar{z})} \right) dm_\zeta \right) \right| + o(\varepsilon) = R + o(\varepsilon),$$

тому що під інтегралом стоїть чисто уявний вираз. Теорема доведена.

Нехай дійсні $R_k > 0$ та комплексні a_k ($a_0 = a_n = 0$), $k = 0, 1, \dots, n$ такі, що

$$|a_k| < R_0 - R_k, |a_k - a_j| > R_k + R_j, k \neq j, k, j = 1, \dots, n$$

Позначимо $D_k = \{z : |z - a_k| < R_k\}$, $C_k = \partial D_k$,

$$\bar{D}_k = D_k \cup C_k, k = 0, 1, \dots, n, D = D_0 \setminus \bigcup_{k=1}^n \bar{D}_k.$$

D будемо називати круговою областю.

Нехай в області D визначена однолиста аналітична функція $w = f(z)$. Системою функцій, що породжують варіацію $f(z)$, будемо називати набір функцій $\{F_k(z, \varepsilon)\}_{k=0}^n$, визначених в деякому околі D_k^δ граничної компоненти D_k , голоморфних і однолистих там при кожному $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, що мають вигляд

$$F_k(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(z - a_k)f'(z)p_k(z) + o(\varepsilon)$$

та відображують D_k^δ на множини $\Delta_k^\delta(\varepsilon)$, які попарно не перетинаються при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Через Δ^ε позначимо $(n+1)$ - зв'язну область, границя якої складається з континуумів

$$Q_k(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \partial \Delta_k^\delta(\varepsilon) \setminus F_k(C_k^\delta, \varepsilon), \text{ які при } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ сходяться до граничних компонентів області}$$

$\Delta = f(D)$. Вона буде конформно еквівалентна області D^ε , обмеженій колами.

Введемо в розгляд розширені групи симетрії кругових областей D і визначеної аналогічно їй D^ε - групи автоморфізмів розширеної площини $\bar{\mathbb{C}}$, породжені відповідно відображеннями $\{A_i\}_{i=0}^n$ і $\{A_i^\varepsilon\}_{i=0}^n$, де

$$A_i(z) = a_i + \frac{R_i^2}{\bar{z} - \bar{a}_i}$$

$$A_i^\varepsilon(z) = a_i + \frac{R_i^{\varepsilon 2}}{\bar{z} - \bar{a}_i^\varepsilon}.$$

Максимальні по включенню підгрупи Γ_+ і Γ_+^ε груп Γ і Γ^ε відповідно, що складаються з конформних відображень, називаються групами симетрії областей D і D^ε . Множину $\Gamma \setminus \Gamma^+$ позначимо через Γ^- .

Введемо позначення $\Gamma^{(n)} = \{A \in \Gamma : A = A_{i_1} \circ A_{i_2} \circ \dots \circ A_{i_k}, i_m \neq i_{m-1}, 2 \leq m \leq k \leq n\}$; $\Gamma^{(0)} = \{I\}$;

$$D^n = \bigcup_{A \in \Gamma^{(n)}} A(\bar{D}); D^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} A(\bar{D}); \Lambda = \bar{\mathbb{C}} \setminus D^\infty.$$

Множина Λ - гранична множина клейнової групи Γ - є ніде не щільною досконалою множиною плоскої міри 0. Вона буде конформно і квазіконформно усувною, тобто будь яке однолисте Q - квазіконформне відображення множини $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Lambda$ може бути продовжено до Q - квазіконформного автоморфізму $\bar{\mathbb{C}}$.

Справедлива наступна

Теорема 4. Нехай система функцій $\{F_k(z, \varepsilon)\}_{k=0}^n$ породжує варіацію функції $f(z)$. Тоді функція $f^\varepsilon(z)$, що конформно відображає область $D^\varepsilon = D_0 \setminus \bigcup_{m=1}^n \overline{D_m^\varepsilon}$, де

$$D_m^\varepsilon = \{z : |z - a_m^\varepsilon| < R_m^\varepsilon\}, \quad a_0^\varepsilon = a_n^\varepsilon = 0, \quad R_0^\varepsilon = R_0$$

$$a_m^\varepsilon = a_m \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\pi i} \sum_{k=0}^n \lim_{t \rightarrow +0} \int_{C_k} \operatorname{Re} p_k(\zeta + \sigma_k t(\zeta - a_k)) H_k(a_m, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - a_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow +0} \int_{C_0} \operatorname{Re} p_0(\zeta - t\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - i\varepsilon\sigma \right) + o(\varepsilon)$$

$$R_m^\varepsilon = R_m \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\pi i} \sum_{k=0}^n \lim_{t \rightarrow +0} \int_{C_k} \operatorname{Re} p_k(\zeta + \sigma_k t(\zeta - a_k)) \operatorname{Re} G_k^{(m)}(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - a_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow +0} \int_{C_0} \operatorname{Re} p_0(\zeta - t\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - i\varepsilon\sigma \right) + o(\varepsilon),$$

$$H_k(z, \zeta) = 2(\zeta - a_k)^2 \left[\sum^+ \frac{s_k(A) A'^2(\zeta)}{A(\zeta)(A(\zeta) - z)} + \sum_0^+ \frac{s_k(A) A'^2(\zeta)}{A^2(\zeta)(A(\zeta) - z)} \right]$$

$$G_k^{(m)}(\zeta) = 2(\zeta - a_k)^2 \left[\sum_{(m)}^+ \frac{s_k(A) A'^2(\zeta)}{(A(\zeta) - a_m)^2} + \sum_0^+ \frac{s_k(A) a_m A'^2(\zeta) (2A(\zeta) - a_m)}{A^2(\zeta)(A(\zeta) - a_m)^2} \right],$$

а σ - довільне дійсне число, на область, яка визначається системою $\{F_k(z, \varepsilon)\}_{k=0}^n$ може бути представлена у вигляді

$$f^\varepsilon(z) = z + \varepsilon z f'(z) \tilde{P}(z) + o(\varepsilon),$$

де

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^n \int_{C_k} \lim_{t \rightarrow +0} \operatorname{Re} p_k(\zeta + \sigma_k t(\zeta - a_k)) H_k(z, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - a_k} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \operatorname{Re} p_0(\zeta - t\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + i\sigma,$$

(функції $H_k(z, \zeta)$ и $G_k^{(m)}(\zeta)$ визначені через узагальнені ряди, які визначаються через відображення з розширеної групи симетрії області D - групи автоморфізмів площини, породженої інверсіями щодо кіл C_i).

При $n = 1$ теорема 4 перетворюється у варіаційну теорему П.П. Куфарєва- Н.В. Сьомухіної [3], а якщо ще зробити граничний перехід $R_1 \rightarrow 0$, отримаємо варіаційну теорему Г.М. Голузіна у формулюванні П.П. Куфарєва. Якщо $p_k(z)$ є такими, що в формулах для a_m^ε множник при ε дорівнює 0, то шляхом досить громіздких викладень може бути отримана варіаційна теорема І.А. Александрова – А.С. Сорокіна [4] для багатозв'язних кругових областей. Рівність нулю цих виразів є необхідною умовою рівності $a_k^\varepsilon = a_k$, що вважається виконаним у наведених роботах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. // Л. Альфорс. - М. : Мир. – 1969. – 136 с.
2. Белинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений. / П.П. Белинский // Нсб.: Наука. – 1974. – 96 с.
3. Куфарев П.П. О распространении вариационного метода Г.М. Голузина на двусвязные области // П.П. Куфарев, Н.В. Семухина.- Доклады АН СССР.- 1956.- т. 107.- №4.- С. 505-507.
4. Александров И.А. О распространении вариационного метода Г.М. Голузина – П.П.Куфарева на многосвязные области // И.А. Александров, А.С. Сорокин.- Доклады АН СССР.- 1967.- т. 175.- №6.- С. 1207-1210.
5. Десятский С. П. Вариация функций, однолистных в многосвязной круговой области / С. П. Десятский ; Донецкий ун-т. – Донецк., 1984. – 31 с. – Деп. в УкрНИИТИ 29.02.84, № 360Ук–Д84.

Десятський Сергій Петрович – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Приазовський державний технічний університет, Маріуполь, e-mail: sergedes@gmail.com

Desyatsky Sergei P., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher and Applied Mathematics, Priazovskyi State Technical University, Mariupol, e-mail: sergedes@gmail.com