УДК 519.872

Н. В. Літвін

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ФУНКЦІОНУВАННЯ СИСТЕМИМАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ У СТАЦІОНАРНОМУРЕЖИМІ.

Приазовський державний технічний університет

Анотація

У роботі проаналізовано асимптотичну поведінку ймовірностей групових відмов на одному інтервалі відновлення контролюючого пристрою.

Ключові слова: *система масового обслуговування, процес відновлення, стаціонарний режим, асимптотика ймовірностей, групові відмови.*

Abstract

This work is about analyzes the asymptotic behavior of the probabilities of group failures on a single recovery interval of the controlling device.

Keywords: *queueing system, the recovery process, stationary mode, asymptotics of the probabilities, group failures.*

У даній роботі розглядається функціонування багатоканальної системи масового обслуговування у стаціонарному режимі, для якої побудований напівмарковський робочий прибор, яким можна замінити k різних робочих приборів.

Розглянемо систему масового обслуговування, яка складається з k різних робочих приборів та одного контролюючого пристрою (пристрій захисту), які функціонують незалежно. Функціонування робочих приборів описується процесами відновлення з часами відновлення β_i, що мають функції розподілу

$$G_i(t) = P(\beta_i \le t), i = \overline{1,k}.$$

Функціонування контролюючого пристрою описується альтернувальним процесом відновлення з часом роботи α_1 і часом відновлення α_0, які мають функції розподілу

$$F_i(t) = P(\alpha_i \le t), i = 0,1.$$

У випадку відмови якогось з робочих приборів контролюючий пристрій у робочому стані миттєво відновлює роботоздатність елементу, який відмовив. Якщо ж відмова сталася під час відновлення контролюючого пристрою, то система вважається такою, що вийшла з ладу (аварійна відмова системи).

Дана робота є продовженням аналізу функціонування описаної вище системи масового обслуговування. У [1] методом фазового укрупнення [2] побудовано напівмарковський робочий прибор, яким можна замінити k різних робочих приборів. Отже будемо розглядати спрощену систему масового обслуговування, яка складається з двох елементів: робочого напівмарковського прибору, що побудований у [1], та контролюючого пристрою. Функціонування робочого прибору описується процесом марковського відновлення з часом відновлення $\Theta_{(k)}$, який має функцію розподілу $P\left(\Theta_{(k)} \le t\right) = U^{(k)}(t)$ [3]. Функціонування контролюючого пристрою описується альтернувальним процесом відновлення з функціями розподілу $F_i(t) = P(\alpha_i \le t), i = 0,1$ часів роботи α_1 і відновлення α_0, причому

$$\alpha_0^\varepsilon = I_\varepsilon \eta + \bar{I}_\varepsilon \varepsilon \xi, \varepsilon \to 0,$$

де I_ε – індикатор з математичним очікуванням

$$M(I_\varepsilon) = \varepsilon p, \varepsilon \to 0, < p < 1,$$

а η та ξ – фіксовані випадкові величини з функціями розподілу

$$\Phi(t) = P(\eta \le t), \ \Psi(t) = P(\xi \le t).$$

Будемо уважати, що існують кінцеві $M(\eta) < \infty$, $M(\xi) < \infty$, $M\left(\Theta_{(k)}\right) < \infty$. Проаналізуємо асимптотику ймовірностей групових відмов на одному періоді відновлення α_0^ε контролюючого пристрою при умові, що система працює у стаціонарному режимі і перша відмова вже сталась (рис.1).

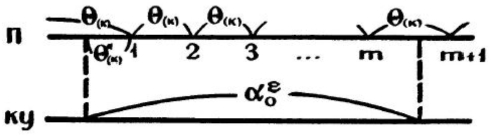

Рисунок 1. Один період відновлення системи

Перш за все, знайдемо ймовірність попадання системи у множину відмовних станів (це і є ймовірність першої відмови). Напівмарковський прибор функціонує у фазовому просторі станів $E = \{1, 2, \ldots, k\}$. Відповідно до [3] уведемо напівмарковські стани системи:

rIx – напівмарковський прибор перейшов у стан $\mathbf{r} \in \mathbf{E}$, контролюючий пристрій у робочому стані, до початку його відновлення залишився час $\mathbf{x \geq 0}$;

r0x – напівмарковський прибор перейшов у стан $\mathbf{r} \in \mathbf{E}$, контролюючий пристрій знаходиться у стані **0**, до кінця його відновлення залишився час $\mathbf{x \geq 0}$;

0rx – контролюючий пристрій перейшов у стан **0** відновлення, а напівмарковський прибор знаходиться у стані $\mathbf{r} \in \mathbf{E}$, до моменту його відновлення залишився час $\mathbf{x \geq 0}$;

Irx – контролюючий пристрій перейшов у робочий стан, а напівмарковський прибор знаходиться у стані $\mathbf{r} \in \mathbf{E}$, до моменту його відновлення залишився час $\mathbf{x \geq 0}$.

На рис. 2 зображена часова схема функціонування системи.

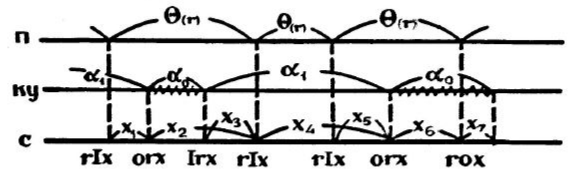

Рисунок 2. Часова схема функціонування системи

Щоб задати процес марковського відновлення $\{\xi_n, \Theta_n; n \geq 0\}$, який описує функціонування системи, визначимо часи перебування у напівмарковських станах (рис. 2):

$$\Theta_{rIx} = \Theta_{(r)} \wedge x\,, \quad \Theta_{r0x} = \Theta_{(r)} \wedge x\,, \quad \Theta_{0rx} = \alpha_0 \wedge x\,, \quad \Theta_{Irx} = \alpha_1 \wedge x\,.$$

Граф-схему переходів вкладеного цепу Маркова $\{\xi_n, n \geq 0\}$ приведено на рис.3.

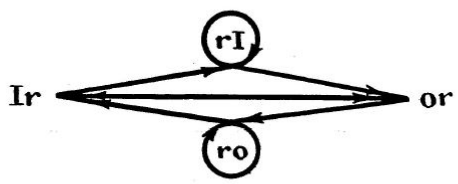

Рисунок 3. Граф-схема переходів вкладеного цепу Маркова.

Відповідно до алгоритму стаціонарного фазового укрупнення [2] стаціонарний процес марковського відновлення $\{\xi_n^c, \Theta_n^c; n \geq 0\}$, який описує функціонування системи у фазовому просторі станів $E^c = \{rI, r0, 0r, Ir; r \in E\}$, задається часами перебування у станах

$$\Theta_{r0}^c = \Theta_{(r)} \wedge \alpha_0^*, \Theta_{rI}^c = \Theta_{(r)} \wedge \alpha_1^*, \Theta_{0r}^c = \alpha_0 \wedge \Theta_{(r)}^*, \Theta_{Ir}^c = \alpha_1 \wedge \Theta_{(r)}^*.$$

Укрупнимо усі стани напівмарковського прибору в один, який позначимо $\hat{1}$. Тоді систему буде описувати процес марковського відновлення $\{\hat{\xi}_n, \widehat{\Theta}_n; n \geq 0\}$ у фазовому просторі станів $\widehat{E} = \{I\hat{1}, \hat{1}I, 0\hat{1}, \hat{1}0\}$ з часами перебування у станах

$$\widehat{\Theta}_{\hat{1}0} = \Theta_{(\hat{1})} \wedge \alpha_0^*, \widehat{\Theta}_{\hat{1}1} = \Theta_{\hat{1}} \wedge \alpha_1^*, \widehat{\Theta}_{0\hat{1}} = \alpha_0 \wedge \Theta_{(\hat{1})}^*, \widehat{\Theta}_{1\hat{1}} = \alpha_1 \wedge \Theta_{(\hat{1})}^*, \tag{1}$$

де випадкові величини $\Theta_{(\hat{1})}$ і $\Theta_{(\hat{1})}^*$ мають:

– функції розподілу виду $U^{(k)}(t) = 1 - \sum_{i=1}^{k} \rho_i \overline{G}_i(t) \overline{G}_{(i)}^*(t)$,

тут ρ_i – стаціонарні ймовірності станів $\mathbf{i} \in \mathbf{E}$;

– щільність розподілу

$$u_{(\hat{1})}^* = \frac{\overline{U}^{(\hat{1})}(t)}{m_{(\hat{1})}}, \quad m_{(\hat{1})} = M\left(\Theta_{(\hat{1})}\right). \tag{2}$$

Уведемо до розгляду випадкову величину $\beta^* = \wedge\big|_{i=1}^{k} \beta_i^*$, яка має щільність розподілу

$$g^{(*)}(t) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \overline{G}_i(t) \overline{G}_{(i)}^*(t). \tag{3}$$

Теорема 1. Ймовірність попадання системи, яка складається із k різних приборів, часи відновлення яких β_i мають функції розподілу $G_i(t)$, $i = \overline{1,k}$ і одного контролюючого пристрою з функцією розподілу $F_0(t)$ часу відновлення α_0 у множину відмовних станів визначається співвідношенням

$$q = P\left(\wedge\big|_{i=1}^{k} \beta_i^* < \alpha_0\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \int_0^\infty \overline{F}_0(t) \overline{G}_i(t) \overline{G}_{(i)}^*(t) dt, \tag{4}$$

де $\mu_i = \dfrac{1}{b_i}, b_i = \int_0^\infty \overline{G}_i(t) dt$, $\overline{G}_{(i)}^* = \prod_{j \neq i}^{k} \overline{G}_j^*, \overline{G}_j^* = \mu_j \int_t^\infty \overline{G}_j(x) dx$.

Доведення. Із усіх станів простору $\hat{E}$ відмовним являється лише один стан $\hat{1}0$, у який можна потрапити тільки із стану $0\hat{1}$. Тому для q, беручи до уваги (1) і (2), можна записати:

$$q = P\left(\Theta_{(\hat{1})}^* < \alpha_0\right) = \int_0^\infty \overline{F}_0(t) u_{(\hat{1})}^*(t) dt = \frac{1}{m_{(\hat{1})}} \int_0^\infty \overline{F}_0(t) \overline{U}_{(\hat{1})}(t) dt \tag{5}$$

Співвідношення (4) доведемо методом математичної індукції. Для двох приборів із (5) будемо мати

$$q = P\left(\Theta_{(2)}^* < \alpha_0\right) = \frac{1}{m_{(2)}} \int_0^\infty \overline{F}_0(t) \overline{U}_{(2)}(t) dt = \mu_1 \int_0^\infty \overline{F}_0(t) \overline{G}_1(t) \overline{G}_2^*(t) dt + \mu_2 \int_0^\infty \overline{F}_0(t) \overline{G}_2(t) \overline{G}_1^*(t) dt =$$

$$= \int_0^\infty \overline{F}_0(t) g^*(t) dt = P\left(\wedge\big|_{i=1}^{2} \beta_i^* < \alpha_0\right)$$

Тобто, (4) при k = 2 вірно і $\Theta_{(2)}^* = \beta_1^* \wedge \beta_2^*$.

Припустимо, що формула (4) вірна для (k – 1)-го прибору і $\Theta_{(k-1)}^* = \wedge\big|_{i=1}^{k-1} \beta_i^*$. Доведемо вірність формули (4) для k приборів. Приймаючи до уваги співвідношення

$$m_{(k)} = \frac{1}{\mu^{(k)}}, \ \overline{G}_{(i)}^*(t) = \sum_{j \neq i}^{n-1} \overline{G}_i^*(t), \ \mu^{(k-1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i, \ \theta_{(k-1)}^0 = \theta_{(k-1)} \wedge \beta_k^*, \ \theta_k^0 = \theta_{(k-1)}^* \wedge \beta_k,$$

а також (3) із (5) для k приборів отримаємо:

$$\begin{aligned} q &= P\left(\Theta_{(k)} < \alpha_0\right) = \frac{1}{m_{(k)}} \int_0^\infty \overline{F}_0(t) \overline{U}^{(k)}(t) dt = \mu^{(k)} \int_0^\infty \overline{F}_0(t) \left[\rho_{(k-1)} \overline{U}^{(k-1)}(t) \overline{G}_k^*(t) + \rho_k \overline{U}^{(k-1)*}(t) \overline{G}_k(t)\right] dt = \\ &= \int_0^\infty \overline{F}_0(t) \left[\mu^{(k-1)} \overline{U}^{(k-1)}(t) \overline{G}_k^*(t) + \mu_k \overline{U}^{(k-1)*}(t) \overline{G}_k(t)\right] dt = \int_0^\infty \overline{F}_0(t) g^*(t) dt = P\left(\theta_{(k-1)}^* \wedge \beta_k^* < \alpha_0\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки $\Theta_{(k-1)}^* = \wedge\big|_{i=1}^{k-1} \beta_i^*$, то (6) з урахуванням (3) набуде вигляду

$$q = P\left(\wedge\Big|_{i=1}^{k-1} \beta_i^* < \alpha_0\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \int_0^\infty \overline{F}_0(t)\overline{G}_i(t)\overline{G}_{(i)}^*(t)\,dt\,,$$

тобто одержали (4). Теорема доведена.

Слідство. У випадку, коли усі прибори однакові, тобто $G_i(t) = G(t)$ при усіх $i = \overline{1,k}$, співвідношення (5) приймає вигляд:

$$q = k\mu^k \int_0^\infty \overline{F}_0(t)\overline{G}(t)\left[\int_t^\infty \overline{G}(x)dx\right]^{k-1} dt\,, \tag{7}$$

де $\mu = \dfrac{1}{b}, b = \int_0^\infty \overline{G}(t)dt$.

Останнє співвідношення (7) просто виходить із (5) з урахуванням позначень

$$\overline{G}_i^*(t) = \frac{1}{b_i}\int_t^\infty \overline{G}_i(x)dx = \mu_i \int_t^\infty \overline{G}_i(x)dx\,,$$

$$g_i^*(t) = \frac{\overline{G}_i(t)}{b_i} = \mu_i \overline{G}_i(t), \quad \overline{G}_i^*(t) = \prod_{j\neq i}^{k} \overline{G}_{(j)}^*(t),$$

де $b_i = \int_0^\infty \overline{G}_i(t)dt,\ \ \mu_i = \dfrac{1}{b_i}$, $\mu^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i$.

У роботі знайдена ймовірність попадання багатоканальної системи масового обслуговування, яка функціонує у стаціонарному режимі, у множину відмовних станів, тобто ймовірність першої відмови системи на одному періоді відновлення контролюючого пристрою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Літвін Н.В. Напівмарківський прилад для багатоканальної системи обслуговування. [Текст]: Материалы XII междунар. заочной науч.-практ. конф. «Развитие науки в XXI веке», 16 апреля 2016г. Харьков / сборник со статьями, 1часть (уровень стандарта, академический уровень). – Х. научно-информационный центр «Знание», 2016. – С. 44 – 50.
2. Королюк В.С. Математические основы фазового укрупнения. [Текст] / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин – К. :Наукова думка, 1978. – 248с.
3. Королюк В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. [Текст] / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин – К. :Наукова думка, 1982. – 235с.

Літвін Наталя Василівна – кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Приазовський державний технічний університет, м. Маріуполь, e-mail: litvin_nv@ukr.net

Litvin Natalya V. – Phys.-math. D., Associate Professor of Pryazovskyi State Technical University, Mariupol, e-mail: litvin_nv@ukr.net