

Ланцюгові дроби в функціональних просторах

Анотація

В роботі були досліджені ланцюгові дроби та їх застосування в функціональному аналізі. А саме для знаходження границь послідовностей ланцюгових дробів та доведення збіжності цих послідовностей.

Ключові слова: ланцюговий дріб, підхідні дроби, стискуєче відображення, нерухома точка.

Abstract

In the paper chain fraction and their application in the functional analysis were studied. It was done in order to find the boundaries of the sequences of the chain fractions and to prove the convergence of these sequences.

Keywords: chain fraction, approach fractions, compression mapping, fixed point.

Теорія ланцюгових дробів є досить цікавою і, хоча ще до кінця не розкрита, знайшла своє різноманітне застосування, в тому числі до теорії наближення функцій. Так наприклад, дослідження показали, що такого виду дроби дають найкращі наближення чисел. Елементарні ланцюгові дроби використовував у своїх працях ще Евклід. Спочатку їх використання зводилося до наближеного добування кореня квадратного з числа. З часом англійський вчений У. Броукен застосував такого виду дріб для уточнення числа π [1, ст.17]. Так в 1572 році з'являється термін «ланцюговий дріб».

Найпростішим ланцюговим дробом називається вираз виду:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \quad (1)$$

Букви $a_0, a_1, a_2, \dots$ при загальному підході є незалежними змінними, при потребі ці змінні можна заставляти пробігати значення тої чи іншої області. Так, можна рахувати $a_0, a_1, a_2, \dots$ дійсними або комплексними числами, або функціями однієї, або декількох змінних. Візьмемо $a_1, a_2, \dots$ додатніми числами; a_0 може бути будь-яким дійсним числом. Ці числа ми називатимемо елементами даного ланцюгового дроби [2, ст.7].

Кількість елементів ланцюгового дроби може бути скінченною (як в наведеному прикладі) та нескінченною. В першому випадку будемо записувати даний дріб у вигляді

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} + \frac{1}{a_n}, \quad (2)$$

та називати скінченим ланцюговим дробом. В другому випадку ми матимемо дріб у вигляді (1) і називатимемо його нескінченим ланцюговим дробом. Будь-який ланцюговий дріб є результатом скінченної кількості раціональних дій над її елементами; скінченний ланцюговий дріб виражає собою деяке дійсне число; якщо, наприклад, всі елементи такого дроби раціональні числа, то і сам дріб виражає раціональне число [2, ст.8].

Для нескінченного ланцюгового дроби ми безпосередньо не можемо переписати ніякого числового значення; він являє собою лише формальний запис, схожий до нескінченного ряду, про збіжність якого не говориться. Для зручності нескінченний ланцюговий дріб записують у вигляді:

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] \quad (3)$$

або

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots \quad (3')$$

Скінченний ланцюговий дріб (2) у вигляді:

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (4)$$

Таким чином кількість членів скінченного ланцюгового дробу рівна кількості елементів, які стоять після крапки з комою.

Розглянемо деякі властивості ланцюгових дробів, для цього розглянемо підхідні дробу. Кожен скінченний ланцюговий дріб виду (4), як результат скінченної кількості дій над його елементами є раціональна функція представлена цими елементами, тому може бути представлена як відношення двох многочленів

$$\frac{P(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n)}{Q(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n)}$$

відносно $a_0; a_1, a_2, \dots, a_n$ з цілими коефіцієнтами. У випадку, коли елементи отримують числові значення, то ми маємо звичайний дріб $\frac{P}{Q}$, але це не єдине представлення. Нехай деяке представлення скінченного ланцюгового дробу у вигляді простого дробу – канонічне. Для нуль-членного ланцюгового дробу $[a_0] = a_0$.

Канонічним представленням буде $\frac{a_0}{1}$, а для дробу, який містить n членів отримаємо

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; r_1] = a_0 + \frac{1}{r_1}$$

де $r_1 = [a_1; a_2, \dots, a_n]$.

Запишемо канонічний вигляд цього дробу

$$r_1 = \frac{P'}{Q'},$$

тоді

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{P'}{Q'} = \frac{a_0 P' + Q'}{P'}$$

Останній дріб ми візьмемо за канонічне представлення ланцюгового дробу $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$; таким чином вважаючи, що

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{P}{Q},$$

$$r_1 = [a_1; a_2, \dots, a_n] = \frac{P'}{Q'},$$

для чисельників і знаменників цих канонічних представлень отримаємо наступне співвідношення:

$$P = a_0 P' + Q', Q = P' \quad (5)$$

Канонічний вигляд представлений тепер однозначно для скінчених ланцюгових дробів. В теорії ланцюгових дробів важливу роль відіграють канонічні представлення відрізків (скінченного або нескінченного) ланцюгового дробу $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$; канонічне представлення відрізка

$$S_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

ці дробу позначимо через $\frac{P_n}{Q_n}$ і називатимемо *підхідним дробом порядку n* даного ланцюгового

дробу α . Означення однакове для скінчених та нескінчених дробів, різниця лише в тому, що скінченний ланцюговий дріб має скінченну кількість підхідних дробів, а нескінченний – нескінченну

[2, 9-11]. Тому підхідним дробом $\frac{P_n}{Q_n}$ до ланцюгового дробу (4) називається скінченний ланцюговий

дріб

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (6)$$

Властивості:

1. Чисельник і знаменник будь-якого підхідного дробу до нескінченного ланцюгового дробу (2) – взаємно прості числа [3, ст.212].
2. Для довільного $n \geq 2$ виконується
$$\left. \begin{aligned} P_n &= a_n P_{n-1} - P_{n-1} \\ Q_n &= a_n Q_{n-1} - Q_{n-1} \end{aligned} \right\} [2, \text{ст.11}].$$
3. При всіх $n \geq 1$, $\left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$ [3,ст.212].
4. При збільшенні номера n знаменники Q_n нескінченного ланцюгового дробу, починаючи з $n=1$ монотонно, необмежено зростають.
5. При збільшенні n чисельники P_n додатного нескінченного ланцюгового дробу монотонно, необмежено зростають.
6. При $n=1,2,\dots, P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}$ [2, ст.11].
7. Модулі відстаней між сусідніми підхідними дробами монотонно зменшуються при збільшенні номера і прямують до нуля.
8. Кожен нескінченний ланцюговий дріб збіжний.

В математиці ланцюгові дроби використовують для розв'язання багатьох типів задач. Їх використовують для наближення дійсних чисел, розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь. Цікавим в математиці є знаходження границь для послідовностей ланцюгових дробів, для цього сформулюємо деякі допоміжні твердження.

Нехай R – метричний простір. Відображення A простору R в себе називається стискующим відображенням, стисканням, якщо існує таке число $\alpha < 1$, що для будь-яких двох точок $x, y \in R$ виконується нерівність

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \quad (7)$$

Кожне стискує відображення неперервне. Справді, якщо $x_n \rightarrow x$ то внаслідок (7) і $Ax_n \rightarrow Ax$. Точка x називається нерухомою точкою відображення A , якщо $Ax = x$. Тобто нерухомі точки – це розв'язки рівняння $Ax = x$. Сформулюємо теорему Банаха про стискаючі відображення:

Теорема: Усяке стискаюче відображення, визначене в повному метричному просторі R , має одну і тільки одну нерухому точку [4, 61].

Крім доведення існування і єдності розв'язку рівняння $Ax = x$, принцип стискаючих відображень дає і фактичний метод наближеного знаходження цього розв'язку.

Нехай f – функція, яка визначена на сегменті $[a, b]$, задовольняє умову Ліпшиця

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq K |x_2 - x_1|$$

з константою $K < 1$ і відображає сегмент $[a, b]$ в себе. Тоді f є стискаюче відображення і, згідно з доведеною теоремою, послідовність $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$ збігається до єдиного кореня рівняння $x = f(x)$. Умова стислості виконується, якщо функція на сегменті $[a, b]$ має похідну $f'(x)$, причому $|f'(x)| \leq K < 1$ [4, 62-64].

Нехай тепер дано рівняння виду $F(x) = 0$, причому $F(a) < 0, F(b) > 0$ і $0 < K_1 \leq F'(x) \leq K_2$ на $[a, b]$. Введемо функцію $f(x) = x - \lambda F(x)$ і шукатимемо розв'язок рівняння $x = f(x)$, рівносильного рівнянню $F(x) = 0$. Оскільки $f' = 1 - \lambda F'(x)$, то $1 - \lambda K_2 \leq f'(x) \leq 1 - \lambda K_1$, число λ можна підібрати так, щоб можна було використати метод послідовних наближень [4, 64].

Застосуємо принцип для доведення того, що послідовність (x_n) ланцюгових дробів

$$2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \dots$$

є збіжною, і знайдемо її границю. Оскільки послідовність (x_n) визначається і рекурентно:

$$x_1 = 2, x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}, (n \geq 2), \text{ то з відношення}$$

$$x_n = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_{n-2}}} \quad (n \geq 3)$$

і оцінок $x_1 \leq \frac{5}{2}, x_2 \leq \frac{5}{2}$ випливає, що $x_n \leq \frac{5}{2} (\forall n \geq 1)$. Крім того, $x_n \geq 2 (n \geq 1)$. Розглянемо

відображення $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ сегмента $\left[2; \frac{5}{2}\right]$ самого в себе. Воно є відображенням стиску, бо

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{1}{4} |x - y| = \frac{1}{4} \rho(x, y). \text{ Звідси } \alpha = \frac{1}{4} - \text{коефіцієнт стиску. Тому}$$

має єдину нерухому точку $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, де $x_n = f(x_{n-1}) = 2 + \frac{1}{x_{n-1}} (n \geq 2)$. Отже, згідно теореми

Банаха рівняння $x^* = 2 + \frac{1}{x^*}$ повинно мати єдиний розв'язок. Корінь даного рівняння – $x^* = 1 + \sqrt{2}$.

Це число і є границею даної послідовності ланцюгових дробів.

Із вище розглянутого можна зробити висновок, що використовуючи принцип стискуючих відображень зручно шукати границі послідовностей ланцюгових дробів.

СПИСОК ВИКОРИСТНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Нестеренко Ю. Очерк о цепных дробях / Ю. Нестеренко, Е. Никишин. // Квант. – 1983. – №5. – С. 17–18.
2. Хинчин А. Я. Цепные дроби / Александр Яковлевич Хинчин. – Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1986. – 114 с.
3. Бухштаб А. А. Теория чисел / Александр Адольфович Бухштаб. – Москва: Просвещение, 1966. – 384 с.
4. Колмогоров А. М. Элементы теории функций и функционального анализа / А. М. Колмогоров, С. Б. Фомин. – Київ: Видавниче об'єднання "Вища школа", 1974. – 456 с.

Стоцька Інна Миклаївна – студентка групи Матем.-31, факультету інформаційних систем, фізики та математики, Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки, Луцьк, e-mail: innastotskane@gmail.com.

Stotska Inna M. – Department of Information Systems, Physics and Mathematics, Lesya Ukrainka East European National University, Lutsk, email: innastotskane@gmail.com.